İKİ CİSİM PROBLEMİ

4.1 Giriş

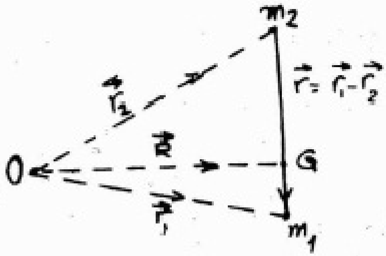
Bölüm 3 te kütlesi diğerine göre ihmal edilebilen bir cismin hareketini incelemiştik. Bu bölümde ise kütleleri birbirine göre ihmal edilemeyen iki cisim alacak ve kendi karşılıklı çekimleri tesiri altında bu iki cismin hareketini inceliyeceğiz. Adı geçen iki cismin küresel simetrik ve kütle dağılımının homojen olduğunu kabul ediyoruz. Zira bu durumda her iki cisim bir birini, sanki kütleleri merkezlerinde toplanmış gibi çeker ve dolayısiyle de Newton kanunları tatbik edilebilir.

Gök cisimleri halinde bilindiği gibi gezegenler tam küresel cisimler değildirler. Fakat güneşten çok uzakta bulunmaları dolayısiyle kütleleri merkezde toplanmış gibi kabul edilir ve Newton kanunları tatbik edilirse gayet hassas neticeler elde edilir.

4.2 Hareket denklemleri.

I. m_1 ve m_2 kütlelerinin herhangibir O noktasına göre hareket denklemleri.

Kütleleri m_1 ve m_2 olan iki cisim ve O merkezli herhangi bir koordinat sistemi alalım. $\vec{Om_1}, = \vec{r_1}$, $\vec{Om_2} = \vec{r_2}$ ve $\vec{m_2m_1} = \vec{r}$ olsun. Newton Genel çekim kanununa göre iki cismin karşılıklı çekim kuvveti



$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{dır.}$$

m_2 nin m_1 üzerindeki çekimi vektörel notasyonla

$$\vec{F}m_1m_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \text{ olur } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r_1} - \vec{r_2}}{r} \quad \text{koyarak}$$

$\vec{F}m_1m_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \quad (\vec{r_1} - \vec{r_2})$ elde edilir. m_1 in m_2 üzerindeki tesiri ise bunun ters işaretlisi olacaktır. O halde

$$\vec{F}m_2m_1 = -G \frac{m_2 m_1}{r^3} \quad (\vec{r_2} - \vec{r_1})$$

Böylece m_1 ve m_2 kütleleri üzerine etki eden kuvvetleri bulduktan sonra bunların O ya göre hareket denklemlerini yazmak için Newton'un ikinci kanununu ($\vec{F} = m\vec{a}$ yı) kullanırız:

m_1 in O ya göre hareket denklemi $m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \; (\vec{r_1} - r_2)$ (1)

m_2 nin O ya göre hareket denklemi $m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_2 m_1}{r^3} \; (r_2 - r_1)$ (2)

olur. Burada . zamana göre türevi göstermektedir.

Biz burada (1) ve (2) diferansiyel denklemlerini çözmüyecek sadece m_1 ve m_2 nin O ya göre hareketlerinin bazı özelliklerini çıkaracağız.

1° İki cismin kütle merkezi uzayda sabit bir hızla doğrusal bir harekette bulunur:

(1) + (2) den $m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0$ dır. integre edelim

$m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = \vec{a}$ tekrar integre edelim

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{a}t + \vec{b}$$

veya kısaca

$$\sum_{i=1}^{2} m_i \vec{r}_i = \vec{a}t + \vec{b} \qquad (3)$$

Burada $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ integrasyon sabitleridir. Diğer taraftan iki cismin ortak kütle merkezine O dan giden vektör $\vec{R}$ ise, kütle merkezi özelliklerinden $\vec{R} = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ dir. Bundan ve (3) ten

$$\vec{R} = \left(\frac{\vec{a}}{m_1 + m_2}\right) t + \frac{\vec{b}}{m_1 + m_2}$$

elde edilir ki bu da kütle merkezinin sabit bir hızla doğrusal bir hareket yaptığını gösterir.

2° İki cismin hareketi esnasında toplam açısal momentum sabit kalır:

$\vec{r}_1 \times (1) + \vec{r}_2 \times (2)$ den $\vec{r}_1 \times m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = O$ dir. bunu bir defa integre edelim

$$\vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{h}$$

veya kısaca

$$\boxed{\sum_{i=1}^{2} \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{h}} \qquad (4)$$

elde ederiz. Burada $\vec{h}$ integrasyon sabitidir. (4) aranılan sonucu ispatlar.

3°. Hareket denklemleri potansiyel fonksiyonu yardımıyla yazılabilir:

m_1 ve m_2 cisimlerinin meydana geitirdiği potansiyel alanı

$V = - G \dfrac{m_1 \ m_2}{r}$ dir. Bunun yardımıyla (1) ve (2) denklemleri

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_1}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_2}$$

veya kısaca

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \qquad i = 1,\ 2 \qquad (5)$$

haline gelir. (5) denklemlerinin doğruluğunu göstermek için

$V = -G \dfrac{m_1 \ m_2}{r}$ yi $V = -G \dfrac{m_1 \ m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ şeklinde yazmak ve

sonra da $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ ye göre kısmî türev almak yeter.

4° Sistemin hareketinde enerji korunumu sağlanır:

$$\dot{\vec{r}}_i \ . \ (5) \text{ den } \ \dot{\vec{r}}_i \ . \ m_i\ddot{\vec{r}}_i + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \ . \ \dot{\vec{r}}_i = O$$

$$\sum_{i=1}^{2} \dot{\vec{r}}_i \ . \ m_i\ddot{\vec{r}}_i + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \ . \ \dot{\vec{r}}_i = O$$

$$\sum_{i=1}^{2} \dot{\vec{r}}_i \ . \ m_i\ddot{\vec{r}}_i + \frac{dV}{dt} = O \qquad \text{integre ederek}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{2} \tfrac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} + V = \text{Sabit}} \tag{6}$$

buluruz. (6) kinetik enerji ile potansiyel enerji toplamının sabit olduğunu gösterir.

II. m_1 ve m_2 cisimlerinin G ortak kütle merkezine göre hareket denklemleri:

Koordinat merkezini kütle merkezine getirelim $\vec{R} = O$ ve dolayısiyla $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = O$

$$(1) \text{ den} \qquad \ddot{\vec{r}}_1 = -G m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r^3} = -G \frac{m_2\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{r^3}$$

$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = O$ bağıntısını kullanarak

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_2\vec{r}_1 + m_1\vec{r}_1}{r^3}$$

ve $G(m_1 + m_2) = \mu$ diyerek

$$\ddot{\vec{r}}_1 = - \mu \frac{\vec{r}_1}{r^3} \tag{7}$$

Benzer yolla $$\ddot{\vec{r}}_2 = - \mu \frac{\vec{r}_2}{r^3} \tag{8}$$

Elde ederiz. (7) m_1 in, (8) ise m_2 nin, ortak kütle merkezi etrafındaki hareket denklemleridir.

III. m_2 nin m_1 etrafındaki hareket denklemi ($m_1 > m_2$).

Son olarak koordinat merkezini ortak kütle merkezinden, büyük cismin kütle merkezine getirelim. $\vec{r}_2 = \vec{r}$ ve $\vec{r}_1 = O$ olur ve dolayısıyla (8) den

$$\ddot{\vec{r}} = - \mu \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{9}$$

elde edilir. (9) m_2 nin m_1 etrafındaki hareket denklemidir. Görüldüğü gibi, m_2, m_1 in bulunduğu yerde $m_1 + m_2$ kütlesine eşit kütleli bir cisim tarafından çekiliyormuş gibi hareket eder. Şimdi bu harekete ait iki özellik çıkaracağız.

1°. Bu harekette açısal momentum sabit kalır:

$\vec{r}$ x (9) dan $$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = - \mu \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$= O$$ integre ederek

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h} \tag{10}$$

Burada $\vec{h}$ bir integrasyon sabitidir. (10) harekette açısal momentumun sabit olduğunu, yâni Kepler'in ikinci kanununun sağlandığını gösterir.

2°. Hareket m_1 den geçen bir düzlem üzerinde yer alır:

$\vec{r}$. (10) dan $$\vec{r} \cdot \vec{h} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

$$\vec{r} \cdot \vec{h} = O \tag{11}$$

(11), $\vec{h}$ sabit vektörüne dik olan $\vec{r}$ vektörlerinin bir düzlem meydana getirdiğini ifade eder.

Şimdi (9) diferansiyel denkleminin çözümünü ele alalım: Bu denklemi $\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}$ şeklinde yazarsak ve Bölüm 3 teki (5) denklemiyle karşılaştırırsak, kuvvet donksiyonunun $f(r) = \frac{\mu}{r^2}$ olduğunu görürüz Bu durumda 3.2 den dolayı çözüm

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos v}}$$

şeklindedir. Orada çıkartılmış olan bütün özellikler $\mu = G(m_1 + m_2)$ olmak şartıyla burada da geçerlidir.

(9) diferansiyel denklemi, üç boyutlu koordinat sisteminde x, y,z bileşenleri cinsinden her biri ikinci mertebeden üç tane diferansiyel denklem verir. Dolayısıyla sistem altıncı mertebeden diferansiyel denklem sistemidir ve integrasyon sonunda altı tane integrasyon sabiti elde edilir. Bu sabitler h ın ve A nın h_x, h_y, h_z, A_x, A_y, A_z bileşenleridir. Fakat dikkat edilirse h hareket düzlemine dik bir vektördür, A ise $\Theta = v$ seçilmiş olması dolayısıyla m_1 den perihel doğrusuna giden bir vektör olmalıdır. O halde bu iki vektör birbirine dik ve

$$\vec{h} \cdot \vec{A} = h_x A_x + h_y A_y + h_z A_z = O$$ olacaktır. Yani bu altı sabitten yalnız beş'i birbirinden bağımsızdır. Bu durumda yalnız beş integrasyon sabiti elde etmiş bulunuyoruz. Şimdi de altıncı sabiti bulmaya çalışacağız.

4.3 Kepler denklemi.

(10) ifadesinin karesini alalım.

$$h^2 = (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

$$= \dot{\vec{r}}^2 \vec{r}^2 - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2$$

$$= r^2 \dot{\vec{r}}^2 - r^2 \dot{r}^2$$

Eliptik yörüngeler için $\dot{\vec{r}}^2 = \upsilon^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ ve $h^2 = \mu p =$

$\mu a(1-e^2)$ olduğundan, yerlerine koyarak

$$\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) r^2 - r^2\dot{r}^2 = \mu a(1-e^2)$$

Eksantrik anomali E, cinsinden $r = a(1 - e\cos E)$ ve türev alarak $\dot{r} = ae\sin E\,\dot{E}$ yerlerine koyarak ve kısaltarak

$$\frac{a^3}{\mu}\,\dot{E}^2(1 - e\cos E)^2 = 1 \text{ elde ederiz.}$$

buradan

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\,(1 - e\cos E)\,dE$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = n \text{ koyarak (bkz. sayfa 79).}$$

$n\,dt = (1 - e\cos E)\,dE$ buluruz. integre ederek $n(t-T) = E - e\sin E$ elde ederiz.

Burada T gezegenin perihelden geçiş anı olup altıncı integrasyon sabitini teşkil eder. $n(t-T)$ genellikle ortalama anomali adı verilen M ile gösterilir. Yerine koyarak

$M = E - e\sin E$ elde ederiz. Bu denkleme Kepler denklemi denir.

Not: Hiperbolik yörünge halinde kepler denklemine benzer bir denklemin incelenmesi okuyucuya bırakılmıştır.

4. 4 Kepler denkleminin çözümü.

herhangibir
Başlangıçta M veriliyor.

e belli olduğuna göre M nin verilen her hangi bir değeri için E nin ğerini bulmaya çalışacağız. Bunun için denklemi $\sin E = \frac{1}{e}(E - M)$ şeklinde yazıp

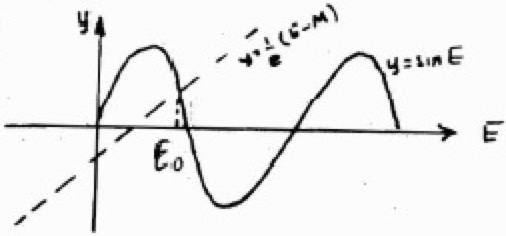
$y = \sin E$ ve $y = \frac{1}{e}(E-M)$ eğrilerini E, y koordinat sisteminde çizelim. Birincisi bildiğimiz sinüs eğrisi ikincisi ise merkezden geçmeyen bir doğrudur. İkisinin kesim noktası Kepler denklemini sağlıyacaktır. Fakat grafikle elde edilecek çözüm kaba bir değer olacaktır. Buna E_o diyelim. Daha hassas bir çözüm bulmaya çalışacağız.

$M_o = E_o - e\sin E_o$ olsun ve $M - M_o = \Delta M_o$ diyelim.

$E_1 = E_o + \Delta E_o$ daha iyi bir kök ise,

$M = E_1 - e \sin E_1$ olmalıdır.

$$M_o + \Delta M_o = E_o + \Delta E_o - e \sin (E_o + \Delta E_o)$$



$$E_o - e\sin E_o + \Delta M_o = E_o + \Delta E_o - e (\sin E_o \cos \Delta E_o + \cos E_o \sin \Delta E_o)$$
$$= E_o + \Delta E_o - e \sin E_o - e \Delta E_o \cos E_o$$

$\Delta E_o = \dfrac{\Delta M_o}{1 - e \cos E_o}$ elde ederiz. Bu değer E_o'a eklenerek E_1 daha iyi kökü elde edilir. Aynı yolla işleme devam edilirse, kök istenildiği kadar sıhhatli hale getirilebilir. Bu metot paragraf 4.9 taki problem 6 da tatbik edilmiştir. → bak buna

4.5 Bir gezegenin t anındaki yeri.

Evvelâ v ile E arasında bir bağıntı bulacağız.

$$r = a (1 - e \cos E) = \frac{a (1 - e^2)}{1 + e \cos v} \quad \text{olduğundan}$$

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad \text{bulunur.}$$

Diğer taraftan, trigonometriden $\tan^2 \dfrac{v}{2} = \dfrac{1 - \cos v}{1 + \cos v}$ olduğu bilinir.

cosv nin yukarıki değeri kullanılarak ve basitleştirilerek

$$\tan^2 \frac{v}{2} = \frac{(1 + e) (1 - \cos E)}{(1 - e) (1 + \cos E)} \quad \text{ve kare kök alarak}$$

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{E}{2} \quad \text{elde ederiz.}$$

Şimdi bir gezegenin her hangi bir t anında yörüngesi üzerinde bulunduğu yeri bulmak için aşağıdaki sırayı takip ederiz.

1. $n\,(t - T) = M$ den M yi buluruz.

2. $M = E - e \sin E$ den E yi buluruz.

3. $\tan \dfrac{v}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}} \tan \dfrac{E}{2}$ den v' yi buluruz.

4. $r = a\,(1 - e \cos E)$ den r yi buluruz.

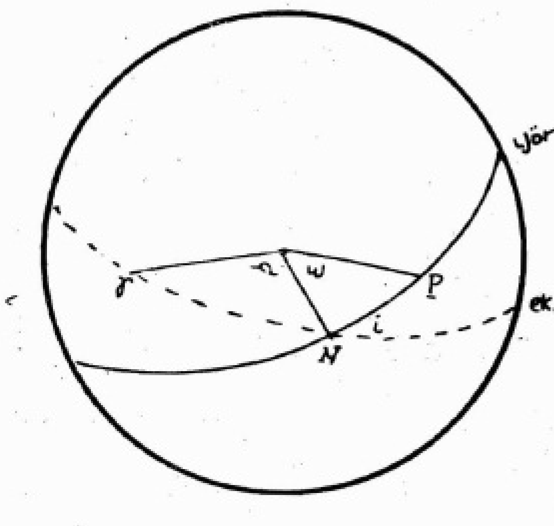
r ile v kutupsal koordinatlarda gezegenin yerini belirtir. Kutupsal koorkoordinatlardan dik koordinatlara geçmek için

ya $x = r \cos v$ ve $y = r \sin v$ veya

$x = a\,(\cos E - e)$ ve $y = a \sqrt{1 - e^2} \sin E$ formülleri kullanılır. Her iki koordinat sisteminde de koordinat merkezi olarak Güneşin bulunduğu odak, x ekseni olarak ta perihel doğrultusu alınmıştır. Diğer koordinat sistemleri 4. 8 de verilecektir.

4.6 Yörünge elemanları.

Yörüngenin gerek uzaydaki durumunun ve gerekse şekil ve büyüklüğünün kat'i olarak bilinmesi için daha evvel elde ettiğimiz altı integrasyon sabitinin verilmesi şarttır. Pratikte h_x, h_y, h_z, A_x, A_y ve T integrasyon sabitleri yerine bunlara belirli bağıntılarla bağlı olan ve çok daha kullanılışlı a, e, i, Ω, ω, T sabitleri kullanılır. Burada



a : Yörüngenin yarı büyük eksen uzunluğu

e : Yörüngenin dış merkezliği,

i : Yörüngenin eğim açısı,

Ω : Yörüngenin çıkış düğümünün boylamı,

enberi noktasının boylamıdır.

ω : Yörüngenin perihelinin argümenti,

T : Gezegenin perihelden geçiş anı,

olup hepsine birden "yörünge elemanları" denir.

Şimdi her iki takım arasındaki bağıntıları belirteceğiz.

1°. $A \dfrac{h^2}{\mu} = e$ bağıntısıyle e, A ve h ye bağlıdır.

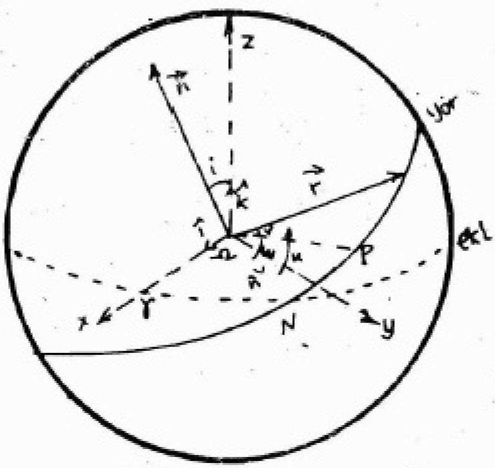
2°. $\dfrac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2)$ bağıntısıyla a, h ye bağlıdır.

3°. x y z koordinat sisteminde

$$\vec{h} = h_x \hat{i} + h_y \hat{j} + h_z \hat{k}$$

$$\hat{n} = \cos\Omega\, \hat{i} + \sin\Omega\, \hat{j}$$

$$\hat{k} \times \vec{h} = h \sin i\, \hat{n}$$



$$\hat{k} \times (h_x \hat{i} + h_y \hat{j} + h_z \hat{k}) = h \sin i\,(\cos\Omega\, \hat{i} + \sin\Omega\, \hat{j})$$

$$h_x \hat{j} - h_y \hat{i} = h \cos\Omega \sin i\, \hat{i} + h \sin\Omega \sin i\, \hat{j}$$

$\hat{i}$ ve $\hat{j}$ nin katsayılarını eşitliyerek

$$h_x = h \sin\Omega \sin i$$

$$h_y = - h \cos\Omega \sin i$$

bağıntılarıyla Ω ve i, h_x h_y h_z'e bağlıdırlar.

4°. $\vec{A} \cdot \hat{n} = A \cos\omega = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \cdot (\cos\Omega\,\hat{i} + \sin\Omega\,\hat{j}) =$

$A_x\cos\Omega + A_y\sin\Omega$

$$\cos\omega = \frac{A_x}{A}\cos\Omega + \frac{A_y}{A}\sin\Omega$$

Bu bağıntı da ω yı A ya bağlamış oluyor. Böylece açıkça görülüyor ki altı integrasyon sabitinin bilinmesi demek altı yörünge elemanının elde edilebilmesi demektir.

Not: Hiperbolik, parabolik ve dairesel yörüngeler halinde yörünge elemanlarının incelenmesi okuyucuya bırakılmıştır.

4.7 Yörünge elemanlarının tayini.

Yörünge elemanlarının tayini veya diğer bir deyişle yörünge tayini için çeşitli metodlar mevcuttur. Bu metodların ayrıntılı bir şekilde incelenmesi bu kitabın kapsamı dışında bırakılmıştır. Biz burada sadece bir fikir vermek maksadıyla bir t anında gezegenin yeri $\vec{r}$, ve hızı $\dot{\vec{r}}$ verildiği taktirde yörünge elemanlarının nasıl tayin edildiğini gösteren bir örnek vereceğiz:

Farzedelim ki bir gök cisminin yeri ve hızı herhangi bir anda tesbit edilmiştir. $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ve $\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$ dır. O an için x, y, z ve $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ biliniyor demektir.

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \quad (y\dot{z} - \dot{y}z)\hat{i} + (z\dot{x} - \dot{z}x)\hat{j} + (x\dot{y} - \dot{x}y)\hat{k}$$

$$h_x = y\dot{z} - \dot{y}z$$

$$h_y = z\dot{x} - \dot{z}x$$

$$h_z = x\dot{y} - \dot{x}y \qquad \text{ve } h = (h_x{}^2 + h_y{}^2 + h_z{}^2)^{1/2}$$

dır. Kullanacağımız diğer formülleri de şimdi çıkaracağız.

$\vec{r} \cdot \hat{n} = r \cos u$ dan $(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}).(\cos\Omega\, \hat{i} + \sin\Omega\, \hat{j}) = r \cos u$

$$x \cos\Omega + y \sin\Omega = r \cos u$$

$$\cos u = \frac{x}{r} \cos\Omega + \frac{y}{r} \sin\Omega$$

$$r = \frac{h^2 / \mu}{1 + e \cos v} \rightarrow e \cos v = \frac{h^2}{\mu} \quad \frac{1}{r} - 1$$ türev alarak $- e \sin v \, \dot{v} = - \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{r^2} \dot{r} \rightarrow e \sin v \, (\dot{v}\, r^2) = \frac{h^2}{\mu} \dot{r} \rightarrow$

$e \sin v \, h = \frac{h^2}{\mu} \dot{r} \rightarrow e \sin v = \frac{h}{\mu} \dot{r}$ fakat $r \dot{r} = \vec{r} . \dot{\vec{r}} \rightarrow \dot{r} = \frac{\vec{r} . \dot{\vec{r}}}{r}$ dolayısiyle

$$e \sin v = \frac{h}{\mu} \quad \frac{\vec{r} . \dot{\vec{r}}}{r} \qquad \text{veya}$$

$$e \sin v = \frac{h}{\mu} \quad \frac{x \dot{x} + y \dot{y} + z \dot{z}}{r}$$

elde ederiz burada $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ dir.

Şimdi de hesap için takip edilecek adımları sıralıyacağız.

1. $$h_x = y\dot{z} - \dot{y}z$$
$$h_y = z\dot{x} - \dot{z}x$$
$$h_z = x\dot{y} - \dot{x}y$$
dan h_x h_y h_z ve h'ı buluruz.

2. $$\left.\begin{aligned} h_x &= h \sin\Omega \sin i \\ h_y &= - h \cos\Omega \sin i \end{aligned}\right\}$$ dan i ve Ω yi elde ederiz.

3. $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ ve $\dot{\vec{r}}^2 = \upsilon^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ den

r ve υ^2 yi bulduktan sonra

$\upsilon^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ dan a yı buluruz.

4. $$e \cos v = \frac{h^2}{\mu} \quad \frac{1}{r} - 1$$

$$e \sin v = \frac{h}{\mu} \quad \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r}$$ den e ve v yi buluruz.

5. $$\cos u = \frac{x}{r} \cos \Omega + \frac{y}{r} \sin \Omega$$ dan u yı buluruz.

ve $\omega = u - v$ den ω yı elde ederiz.

6. $$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$ den E yi buluruz ve

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t\text{-}T) = E - e \sin E$$ den de T yi elde ederiz.

Böylece bir gezegenin veya peykin yörüngesi üzerindeki herhangi bir andaki yeri ve hızı belli ise yukarıki metotla bu yörüngenin elemanları a, e, i, Ω, ω, T elde edilmiş olur. Bu yer ve hız, bir sun'i peyk halinde peykin tam yörüngeye girdiği an olarak seçilebilir. O halde, peykin yörüngesine girdiği andaki ilk şartlardan hareket ederek yörüngesinin uzaydaki durumunu, büyüklüğünü, şeklini elde edebiliriz. Bundan sonra yapılacak iş yörünge elemanları bilindiğine göre peykin her hangi bir andaki koordinatlarını bulmak olacaktır.

1 Laplace metoduyla yörünge tayininde, gezegenin üç ayrı zamandaki yeri rasat edilir. Bu rasatlar mümkün olduğu kadar eşit aralıklarla yapılır. Böylece

t_1 anında α_1 , δ_1

t_2 anında α_2 , δ_2

t_3 anında α_3 , δ_3

rektasansıyon ve deklinasyonları rasat edilir. Bunlardan hareket ederek t_2 anında cismin $\vec{r}$ ve $\dot{\vec{r}}$ 'sı bulunur, ve 4.7 deki metodla yörünge elemanları hesap edilir.

2 Gauss metoduyla yörünge tayininde ise, sadece iki ayrı zaman için gezegenin yeri rasat edilir ve bunlardan istifade edilerek yörünge elemanları tayin edilir. Örneğin: bir cismin atılış anındaki yeri, ve hedefe değme

anındaki yeri biliniyorsa cismin yörüngesi tayin edilebilir. Bu metodta da 4.7 deki formüllerden bir çoğu kullanılmaktadır.

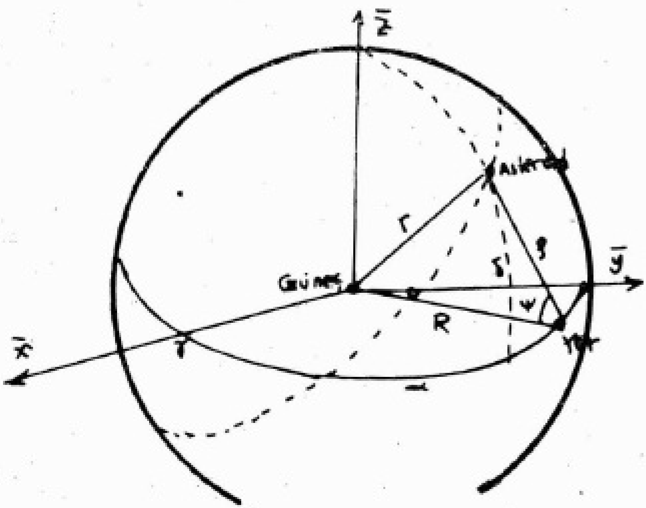
Yörünge tayini konusunda geniş bilgiler kaynak 11, 12, 13 de mevcuttur. Diğer taraftan çift yıldızların yörüngelerinin tayini de aşağı yukarı gezegenlerde ki yörünge tayinlerine benzer. Bu konuda ki metodlar da Kaynak 10 ve 20 den temin edilebilir.

Biz şimdi burada hesapların nasıl yürütüldüğü hakkında bir fikir vermek için laplace Metodunun bir uygulamasını göstereceğiz:

Lick Rasathanesinde 1909 HC küçük gezegeninin üç ayrı gözlemi yapılmış ve aşağıdaki değerler elde edilmiştir:

1910		
$t_1 =$ Kas. $7^g,8205$	$\alpha_1 = 3°50'24'',3$	$\delta_1 = 25°11'10'',5$
$t_2 =$ Kas. 26,7480	$\alpha_2 = 3\ 13\ 3,0$	$\delta_2 = 22\ 29\ 31,3$
$t_3 =$ Ara. 18,6262	$\alpha_3 = 4\ 54\ 19,0$	$\delta_3 = 20\ 14\ 51,9$

Gözlem anları Greenwich Ortalama Zamanı ile verilmektedir. Şimdi bu asteroidin yörünge elemanlarını hesap edeceğiz.



Sayfa 97 de bir cismin Güneş merkezli ekliptik dik koordinat sistede ki yeri x, y, z ve hızı $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ verilince onun yörünge elemanlarının nasıl tayin edileceğini görmüştük. Şimdi ise bize sadece üç ayrı andaki rektasansiyon ve deklinasyon değerleri verilmektedir. O halde ilk iş olarak verilen bu değerler yardımıyla x, y, z ve $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ nin hesabını ele alalım. Bu hesab için gerekli formülleri burada çıkarmıyacağız. Sadece hesabın nasıl yapıldığını adım adım göstereceğiz:

1. Asteroidin Güneş merkezli $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ dik koordinat sistemindeki doğrultman kosinüsleri olan ξ, η, ζ yı her üç an için aşağıdaki formülden hesap ederiz.

$$\xi = \cos\delta \cos\alpha$$
$$\eta = \cos\delta \sin\alpha$$
$$\zeta = \sin\delta$$

Çeşitli α ve δ değerleri yerlerine koyulurlsa

$$\xi_1 = 0{,}902897 \qquad \xi_2 = 0{,}922476 \qquad \xi_3 = 0{,}934768$$
$$\eta_1 = 0{,}060606 \qquad \eta_2 = 0{,}051857 \qquad \eta_3 = 0{,}080227$$
$$\zeta_1 = 0{,}425562 \qquad \zeta_2 = 0{,}382554 \qquad \zeta_3 = 0{,}346080$$

elde ederiz.

2. Epok olarak ikinci gözlem anını seçelim. $t = t_2$ ve $\xi = \xi_2$, $\eta = \eta_2$, $\zeta = \zeta_2$ olur. ξ, η ve ζ nın birinci ve ikinci türevlerini de aşağıdaki formüllerden elde ederiz.

$$\tau_1 = k(t_1 - t) = 0{,}0172021\ (-18{,}9275) = -\ 0{,}325592$$
$$\tau_3 = k(t_3 - t) = 0{,}0172021\ (\ 21{,}8782) = \quad 0{,}376349$$
$$T_1 = \tau_1 + \tau_3 = \quad 0{,}050758 \qquad T_2 = \tau_1\, \tau_3 = -\ 0{,}122536$$
$$A = \tau_1 (\tau_1 - \tau_3) = 0{,}228545 \qquad C = \tau_3(\tau_3 - \tau_1) = 0{,}264174$$

$$\dot{\xi} = -\ \xi_1 \frac{\tau_3}{A} - \quad \xi_2 \frac{T_1}{T_2} - \xi_3 \frac{\tau_1}{C} = \quad 0{,}047391$$

$$\dot{\eta} = -\ \eta_1 \frac{\tau_3}{A} - \quad \eta_2 \frac{T_1}{T_2} - \eta_3 \frac{\tau_1}{C} = \quad 0{,}020560$$

$$\dot{\zeta} = -\ \zeta_1 \frac{\tau_3}{A} - \quad \zeta_2 \frac{T_1}{T_2} \quad \zeta_3 \frac{\tau_1}{C} = -\ 0{,}115775$$

$$\ddot{\xi} = \xi_1 \frac{2}{A} + \quad \xi_2 \frac{2}{T_2} + \xi_3 \frac{2}{C} = -\ 0{,}078250$$

$$\ddot{\eta} = \eta_1 \frac{2}{A} + \quad \eta_2 \frac{2}{T_2} + \eta_3 \frac{2}{C} = \quad 0{,}291339$$

$$\ddot{\zeta} = \zeta_1 \frac{2}{A} + \quad \zeta_2 \frac{2}{T_2} + \zeta_3 \frac{2}{C} = \quad 0{,}100251$$

3. Yer'in Güneş merkezli ekvatoryal X, Y, Z koordinatlarını t anı için Almanaklardan alırız.

$$X = -\quad 0{,}4306621$$
$$Y = -\quad 0{,}8143312$$
$$Z = -\quad 0{,}3532489$$

Bu değerler bizzat t anı için almanakta mevcut değildir. Onun için Bölüm 7 de ki interpolasyon formülünü kulllanarak yukarıdaki değerler elde edilmiştir. Yine Bölüm 7 de izah edilen nümerik türev alma formülleri yardımıyla Yer'in Güneşe göre hızı olarak ta aşağıdaki değerleri elde ederiz,

$$\dot{X} = 0{,}0157626 \ \frac{1}{k} = \quad 0{,}91632$$

$$\dot{Y} = -\,0{,}0068430 \ \frac{1}{k} = -\quad 0{,}39780$$

$$\dot{Z} = -\,0{,}0029692 \ \frac{1}{k} = -\quad 0{,}17261$$

4. $$\xi\left(\ddot{\rho} + \frac{\rho}{r^3}\right) + 2\,\dot{\xi}\,\dot{\rho} + \ddot{\xi}\,\rho = X\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)$$

$$\eta\left(\ddot{\rho} + \frac{\rho}{r^3}\right) + 2\,\dot{\eta}\,\dot{\rho} + \ddot{\eta}\,\rho = Y\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)$$

$$\zeta\left(\ddot{\rho} + \frac{\rho}{r^3}\right) + 2\,\dot{\zeta}\,\dot{\rho} + \ddot{\zeta}\,\rho = Z\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)$$

Denklemlerinde önce bilinen ξ, η, ζ, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$, $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$, $\ddot{\zeta}$, X, Y, Z değerlerini yerlerine koyarız. Sonra $\left(\ddot{\rho} + \frac{\rho}{r^3}\right)$ ve $\dot{\rho}$ yı elimine ederiz. Ve

$$0{,}3133\rho = -\,0{,}8132\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)$$

elde ederiz. $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 =$ den $\frac{1}{R^3} = 1{,}0413$ dür. Bunu da yerine koyarak

$$\rho = 2{,}703 - \frac{2{,}596}{r^3} \qquad (1)$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$R \cos\Psi = X\xi + Y\eta + Z\zeta = -0{,}57464$$

tür. Bunu ve R^2 nin değerini

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos\Psi$$

de yerine koyarak

$$r^2 = 0{,}9734 + 1{,}1493\rho + \rho^2 \qquad (2)$$

(1) ve (2) denklemlerini ardışık yaklaştırmalarla çözersek

$r = 3{,}304$ için $\rho = 2{,}631$ elde ederiz. Bu değerleri yukarıda yerlerine koyarak ta $\dot{\rho} = 0{,}637$ buluruz.

5. Asteroidin Güneş merkezli ekvatoryal dik koordinatları ve hızı:

$$\bar{x} = \xi\rho - X = 2{,}857691 \qquad \dot{\bar{x}} = \xi\dot{\rho} + \dot{\xi}\rho - \dot{X} = -0{,}20402$$

$$\bar{y} = \eta\rho - Y = 0{,}950783 \qquad \dot{\bar{y}} = \eta\dot{\rho} + \dot{\eta}\rho - \dot{Y} = 0{,}48493$$

$$\bar{z} = \zeta\rho - Z = 1{,}359759 \qquad \dot{\bar{z}} = \zeta\dot{\rho} + \dot{\zeta}\rho - \dot{Z} = 0{,}11170$$

6. Asteroidin Güneş merkezli ekliptik dik koordinatları ve hızı:

$$x = \bar{x} \qquad \dot{x} = \dot{\bar{x}}$$

$$y = \bar{y}\cos\varepsilon + \bar{z}\sin\varepsilon \qquad \dot{y} = \dot{\bar{y}}\cos\varepsilon + \dot{\bar{z}}\sin\varepsilon$$

$$z = -\bar{y}\sin\varepsilon + \bar{z}\cos\varepsilon \qquad \dot{z} = -\dot{\bar{y}}\sin\varepsilon + \dot{\bar{z}}\cos\varepsilon$$

1910 için $\varepsilon = 23°27'03'', 58$ dir. Bilinen değerler yerlerine koyulursa,

$$x = 2{,}857691 \qquad \dot{x} = -0{,}20402$$

$$y = 1{,}413385 \qquad \dot{y} = 0{,}48932$$

$$z = 0{,}869063 \qquad \dot{z} = -0{,}09051$$

elde edilir.

7. $h_x = y\dot{z} - \dot{y}z = -0{,}55317$

$h_y = z\dot{x} - \dot{z}x = 0{,}08134$ bunlardan $h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} = 1{,}7769$

$h_z = \dot{x}y - x\dot{y} = 1{,}68668$

8. $h_x = h \sin\Omega \sin i$ $\qquad - 0{,}55317 = 1{,}7769 \sin\Omega \sin i$

den

$h_y = - h \cos\Omega \sin i$ $\qquad 0{,}08134 = - 1{,}7769 \cos\Omega \sin i$

Bu denklemlerin çözümünden de

$$i = 18°20'25''$$
$$\Omega = 261°38'06'.$$

elde edilir.

9. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3{,}304$ $\quad \upsilon^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0{,}28924$

$\upsilon^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ ifadesinde $\mu = k^2 (M + m)$ dir. m asterioidin kütlesi olup ihmal edilmektedir. M ise Güneşin kütlesidir ve birim alınır. k^2 ise, daha önce hızlar hesap edilirken $\frac{1}{k}$ ile çarpıldıklarından zaten υ^2 içerisinde $\frac{1}{k^2}$ halinde mevcuttur. Bu durumda yukardaki formül

$\upsilon^2 = \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ şeklinde kullanılmalıdır. υ^2 ve r nin değerleri yerlerine koyulursa

$$a = 3{,}164 \text{ A.B.}$$

elde edilir.

10. $$e \cos v = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{r} - 1$$

$$e \sin v = \frac{h}{\mu} \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r}$$

Formüllerinde 9. da ki gibi $\mu = k^2$ dir. Fakat h nin hesabında $\frac{1}{k}$ çarpanı mevcut olduğundan h^2 içinde $\frac{1}{k}$ mevcuttur. İkinci denklemde ise h içinde $\frac{1}{k}$ ve $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$ de de yine $\frac{1}{k}$ vardır, dolayısiyle orada da $\frac{1}{k^2}$ var demek oluyor. Bu durumda denklemlerimiz,

$$e \cos v = \frac{h^2}{r} - 1$$

$$e \sin v = \frac{h}{r} \quad (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})$$

haline gelir. Bilinen değerleri yerlerine koyarak

$$e \cos v = - \quad 0{,}044341$$

$$e \sin v = \quad 0{,}016070$$

Buradan da $v = 160°04'40''$ ve

$$\underline{e = 0{,}04716}$$

elde ederiz.

11. $\cos u = \frac{x}{r} \cos\Omega + \frac{y}{r} \sin\Omega = - 0{,}54904$ ve buradan $u = 56° \, 41' \, 54''$ buluruz. u açısının hangi bölgede bulunduğunu ise $\sin u = \frac{z}{r \sin i} = 0{,}83593$ den buluruz. cos u negatif, sin u ise pozitif olduğuna göre u açısı ikinci bölgede olmalıdır. O halde $u = 180° - 56° \, 41' \, 54'' = 123° \, 18' \, 06''$ dir.

Bu durumda $\omega = u - v = - 36°46'34''$ olur. Bunu 360° den çıkararak

$$\underline{\omega = 323°13'26''}$$

elde ederiz.

12. $\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{E}{2}$ den $E = 159°08'10'' = 2^r{,}77744$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{k}{a^{3/2}} = \frac{0{,}0172021}{a^{3/2}} = \frac{3548''188}{a^{3/2}} =$$

$$630''53 \ / \text{gün} = 0{,}003057 \text{ rad} \ / \text{gün}$$

Bunları $n(t - T) = E - e \sin E$ de yerlerine koyalım.

$$0{,}003057 \text{ rad /gün } (26{,}7480 - T) \text{ gün} = 2{,}77744 - 0{,}04716 \times 0{,}356147$$

$$26{,}7480 - T = 853{,}6393$$

$$T = - 826{,}891 \text{ radyan} = - 131{,}0369 \text{ gün}$$

$$= 18{,}7111 \text{ tem. } 1910$$

Böylece bütün elemanları hesap etmiş olduk.