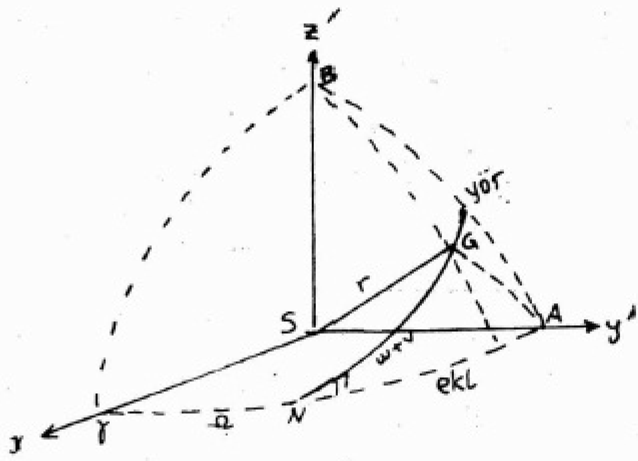
4.8 Koordinat sistemleri.

Herhangi bir gezegenin yörüngesinin a, e, i, Ω, ω, ve T elemanlarının verildiğini kabul edelim. Bir t anında gezegenin yörüngesi üzerindeki yerini hesap edebilmek için belirli bir koordinat sistemine ihtiyaç vardır. Özel bir hali 4.5 te görmüştük Aşağıda da astronomide kullanılan çeşitli koordinat sistemlerinden bazılarını göreceğiz.

1. Güneş merkezli ekliptik dik koordinatlar: x′ ilk bahar noktasına, z′ ekliptiğin kuzey kutbuna doğru olmak üzere güneş merkezli (Heliosantrik) x′y′z′ dik koordinatlar sistemini alalım. Bir t anında gezegenin yeri G olsun. G nin dik koordinatları.

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\cos GS\gamma = r\cos\widehat{G\gamma} \\ y' &= r\cos GSA = r\cos\widehat{GA} \\ z' &= r\cos GSB = r\cos\widehat{GB} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$



Diğer taraftan G γ N, GNA ve GNB küresel üçgenlerinde kosinüs bağıntısını yazarak

$$\left.\begin{aligned} \cos\widehat{G\gamma} &= \cos\Omega\cos(\omega+v) - \sin\Omega\sin(\omega+v)\cos i \\ \cos\widehat{GA} &= \sin\Omega\cos(\omega+v) + \cos\Omega\sin(\omega+v)\cos i \\ \cos\widehat{GB} &= \sin(\omega+v)\sin i \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

elde ederiz (1) ve (2) den

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\,[\cos\Omega\cos(\omega+v) - \sin\Omega\sin(\omega+v)\cos i] \\ y' &= r\,[\sin\Omega\cos(\omega+v) + \cos\Omega\sin(\omega+v)\cos i] \\ z' &= r\,[\sin(\omega+v)\sin i] \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(3) ifadeleri bir gezegenin Heliosantrik ekliptik dik koordinatlarıdır. Yörünge elemanları biliniyorsa Ω, ω ve i biliniyor demektir. Bir t anında x' y' z' nin hesabı için O anda r ve v nin de bilinmesi icab eder. Bunun için

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (t - T) = E - e \sin E \text{ den } E, \; r = a(1 - e \cos E)$$

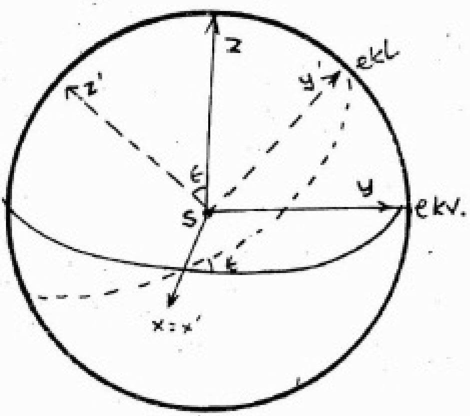
den r ve $\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$ den de v hesap edilir.

ve bu değerler (3) de yerlerine konularak x' y' z' elde edilir.

2. Güneş merkezli ekvatoryal dik koordinatlar: Ekliptik ve ekvatoryal sistemde x ekseni ortak ve diğer eksenler ε açısı kadar dönmüştür. Dolayısiyle yeni koordinatlar

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \cos \varepsilon - z' \sin \varepsilon \\ z &= y' \sin \varepsilon + z' \cos \varepsilon \end{aligned} \tag{4}$$

bağıntılarından elde edilirler.



3. Yerin Güneş merkezli ekvatoryal dik koordinatları: Yerin yörünge elemanlarını (3) te yerlerine koyarsak ve sonuçları (4) e nakledersek Yerin Güneş merkezli ekvatoryal dik koordinatlarını buluruz.

4. Yer merkezli (geosantrik) ekvatoryal dik koordinatlar. Güneş merkezli ekvatoryal dik koordinatlar sistemindeki eksenlere yer merkezinden paraleller çizerek Yer merkezli ekvatoryal dik koordinatlar sistemini elde ederiz. O halde 3. teki koordinatlar Güneşin yer merkezli ekvator-

yal dik koordinatları olacaktır. Bunlar XYZ harfleriyle gösterilir ve American Ephemeris and Nautical Almanac'ta yılın her günü için verilirler.

Bir gezegenin yer merkezli ekvatoryal dik koordinatlarını bulmak için gezegenin Güneşe göre ekvatoryal dik koordinatları xyz'yi (4) ten buluruz. Güneşin yere göre ekv. dik koordinatları XYZ yi Almanaktan okuruz. Gezegenin yere göre koordinatları

ξ, η, ζ, ise

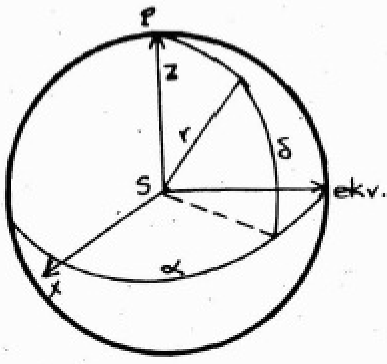
$$\begin{aligned} \xi &= x - X \\ \eta &= y - Y \\ \zeta &= z - Z \end{aligned} \tag{5}$$

olacaktır.

Bir gezegenin Güneş merkezli ekvatoryal xyz dik koordinatları biliniyorsa bunlar yardımıyla o gezegenin rektasansiyon ve deklinasyonu elde edilebilir. Bunun için aşağıdaki formüller kullanılır.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \cos\delta \\ y &= r \sin \alpha \cos\delta \\ z &= r \sin\delta \end{aligned} \tag{6}$$

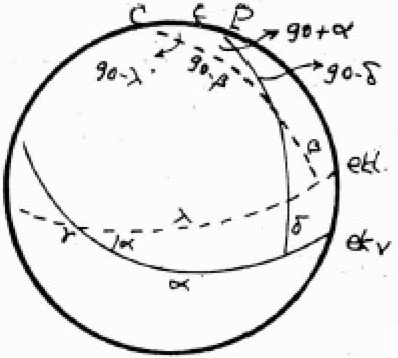
Burada $r = (x^2 + y^2 + x^2)^{1/2}$ dir.



α ve δ belli iken ekliptik (göksel) enlemi ve boylamı bulmak için de

$$\begin{aligned} \cos\beta \cos\lambda &= \cos\alpha \cos\delta \\ \cos\beta \sin\lambda &= \cos\varepsilon \cos\delta \sin\alpha + \sin\varepsilon \sin\delta \\ \sin\beta &= - \sin\varepsilon \cos\delta \sin\alpha + \cos\varepsilon \sin\delta \end{aligned} \tag{7}$$

formülleri kullanılır. İlgili şekil sayfa 109 dadır.



4.9 Problemler.

1. Ψ bir gezegenin hareket doğrultusu ile radyal doğrultuya dik doğrultu arasındaki açı ise, gösteriniz ki

$$\tan\Psi = \frac{e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} \quad \text{dir.}$$

Çözüm:

$$\tan\Psi = \frac{\Delta r}{r\,\Delta\Theta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{\Delta r}{\Delta t}}{r\,\dfrac{\Delta\Theta}{\Delta t}} = \frac{\dot r}{r^2\dot\Theta} = \frac{r\,\dot r}{r^2\dot\Theta} = \frac{r\,\dot r}{h}$$

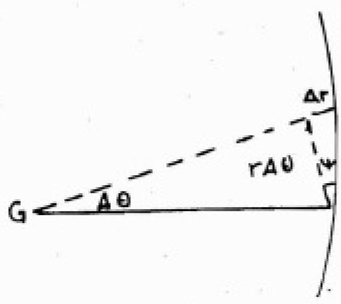
Diğer taraftan $r = a\,(1 - e \cos E)$ den türev

alarak $r = ae\,\dot E \sin E$

Kepler denklemi $n\,(t - T) = E - e \sin E$ den türev alarak

$$n = \dot E\,(1 - e \cos E)$$

$$= \dot E\,\frac{r}{a} \rightarrow \dot E = \frac{na}{r}$$



Dolayısiyle $\dot r = a\,e\,\dot E \sin E$

$$= \frac{na^2\,e}{r} \sin E$$

$$\text{ve} \quad \tan\Psi = \frac{r\dot{r}}{h} = \frac{r \dfrac{na^2e}{r} \sin E}{h} = \frac{na^2 e \sin E}{h} =$$

$$\frac{\sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}} \; a^2 e \sin E}{\sqrt{\mu a (1 - e^2)}} = \frac{e \sin E}{\sqrt{1 - e^2}}$$

2. Bir eliptik yörüngede $\dot{r}$ nın (hızın radyal bileşeni), odaktan eksene çıkılan dikmenin yörüngeyi kestiği noktada maksimum olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Yörünge denklemi $r = \dfrac{p}{1 + e \cos v}$ den türev alarak

$$\dot{r} = \frac{p\, e \sin v\, \dot{v}}{(1 + e \cos v)^2}$$

$$p\dot{r} = \frac{p^2}{(1 + e \cos v)^2} \; e \sin v \; \dot{v}$$

$$= e \sin v \; r^2 \; \dot{v}$$

$$\dot{r} = \frac{eh}{p} \sin v$$

açıkça görülüyor ki $v = 90^\circ$ iken $\dot{r}$ maksimumdur.

3. Bir gezegen Güneş etrafında eksantrisitesi e olan bir elips çiziyor. Perihelden küçük eksenin yörüngeyi kestiği noktaya kadar geçen zamanı e ve P cinsinden bulunuz.

Çözüm:

Kepler denkleminde $M = n(t - T)$ ve $n = \dfrac{2\pi}{P}$

koyalım. $\dfrac{2\pi}{P} (t - T) = E - e \sin E$

Kesişme noktasında $E = \frac{\pi}{2}$ dir. Yerine koyarak

$$\frac{2\pi}{P}(t - T) = \frac{\pi}{2} - e\sin\frac{\pi}{2}$$

$$t - T = \frac{\pi - 2e}{2\pi} P$$

4. $e = \sin \varnothing$ ise gösteriniz ki $\tan\frac{v}{2} = \tan(45° + \frac{\varnothing}{2})$ $\tan\frac{E}{2}$ dir.

Çözüm :

$$\tan(45° + \frac{\varnothing}{2}) = \frac{1 + \tan\frac{\varnothing}{2}}{1 - \tan\frac{\varnothing}{2}} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \text{ burada } \beta = \tan\frac{\varnothing}{2}$$

$$\text{Şimdi } e = \sin\varnothing = \frac{2\tan\frac{\varnothing}{2}}{1 + \tan^2\frac{\varnothing}{2}} = \frac{2\beta}{1+\beta^2} \rightarrow \beta = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{e}$$

$$\text{Dolayısiyle } \tan(45° + \frac{\varnothing}{2}) = \frac{1 + \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{e}}{1 - \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{e}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

Bu değer doğruluğu gösterilmesi istenilen bağıntıda yerine koyulursa

$$\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2} \text{ bilinen formülü}$$

elde edilir.

5. $e = \sin \varnothing$ ise gösteriniz ki $\tan E = \sec \varnothing \tan 2X$ dir.

Burada $\tan X = \tan (45^\circ + \frac{\varnothing}{2}) \tan \frac{M}{2}$ ve $\tan E = \dfrac{\sin M}{\cos M - e}$ dir.

Çözüm:

$$\tan (45^\circ + \frac{\varnothing}{2}) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad \text{koyarsak}$$

$$\tan X = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{M}{2}$$

Dolayısiyle $$\tan 2X = \frac{2 \tan X}{1-\tan^2 X} = \frac{2\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}} \tan \dfrac{M}{2}}{1 - \dfrac{1+e}{1-e} \tan^2 \dfrac{M}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{1-e^2} \tan \dfrac{M}{2}}{(1\ e)-(1+e) \tan^2 \dfrac{M}{2}}$$

diğer taraftan $e = \sin \varnothing$ olduğundan $\sec \varnothing = \dfrac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ dolayısiyle

$$\tan E = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \quad \frac{2\sqrt{1-e^2} \tan \dfrac{M}{2}}{(1-e)-(1+e) \tan^2 \dfrac{M}{2}}$$

$$\frac{\sin M}{\cos M - e} = \frac{2 \tan \dfrac{M}{2}}{(1-e)-(1+e) \tan^2 \dfrac{M}{2}}$$

$\sin M$ ve $\cos M$ yerine $\tan \dfrac{M}{2}$ cinsinden değerleri yazılarak.

$$\frac{\dfrac{2 \tan \dfrac{M}{2}}{1+\tan^2 \dfrac{M}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2 \dfrac{M}{2}}{1+\tan^2 \dfrac{M}{2}} - e} = \frac{2 \tan \dfrac{M}{2}}{(1-e)-(1+e) \tan^2 \dfrac{M}{2}}$$

sol tarafta gereken kısaltmalar yapılırsa her iki tarafın birbirine eşit olduğu görülür.

6. Bir gezegenin yörüngesinin aşağıdaki elemanları veriliyor.

$$e = 0{,}2 \text{ radyan}$$
$$a = 3{,}4 \text{ Astronomi birimi}$$
$$T_0 = 1{,}0 \text{ Ocak } 1965$$

Kepler denklemini $t = 14{,}5$ Ekim 1965 için çözünüz

Çözüm:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\frac{G(M\odot + M_{gez.})}{a^3}}$$

$M_{gez.} \ll M\odot$ olduğundan $M_{gez.}$' i ihmal edelim.

$M\odot = 1$ aldığımız taktirde $\mu = G$ olacaktır. Bu durumda kütle birimi olarak güneşin kütlesi, uzunluk birimi olarak Astronomi Birimi, zaman birimi olarakta ortalama güneş günü alındığından

$G = k^2 = 0{,}000295$ olacaktır.

$$n = \sqrt{\frac{0{,}000295}{(3{,}4)^3}} = 0{,}00274 \text{ rad/gün}$$

$$\begin{aligned} M &= n(t-T) = 0{,}00274 \text{ rad/gün } (14{,}5 \text{ Ekim } 1965\text{-}1{,}0 \text{ Ocak } 1965) \\ &= 0{,}00274 \text{ rad/gün, x } 286{,}5 \text{ gün} \\ &= 0{,}785 \text{ rad} \\ &= 0{,}785 \times 57^\circ{,} 29 \\ &\simeq 45^\circ \end{aligned}$$

Şimdi

$e = 0{,}2$ radyanı dereceye çevirelim.

$$e = 0{,}2 \times 57^\circ{,}29$$
$$= 11^\circ{,}459$$

M ve e nin bu değerlerini Kepler denkleminde yerlerine koyalım.

$0{,}785 rd = E - 0{,}2 . \sin E$

$$45^\circ = E - 11^\circ{,}459 \sin E$$

Çözüm için $y = \sin E$ ve $y = \dfrac{1}{11^\circ{,}459}(E - 45^\circ)$ eğrilerini (y,E) koordinat sisteminde çizdiğimiz taktirde kesim noktası E için yaklaşık olarak 53° verecektir. Buna E_o diyelim ve denklemde yerine koyalım.

$$M_o = 53^\circ - 11^\circ{,}459 \sin 53^\circ = 43^\circ{,}8483$$

$$\Delta M_o = M - M_o = 45^\circ - 43^\circ{,}8483 = 1^\circ{,}1517$$

$$\Delta E_o = \frac{\Delta M_o}{1 - e \cos E_o} = \frac{1^\circ{,}1517}{1 - 0{,}2 \cos 53^\circ} = \frac{1^\circ 1517}{0{,}8796} = 1^\circ{,}3093$$

$$E_1 = E_o + \Delta E_o = 53^\circ + 1^\circ{,}3093$$

$E_1 = 54^\circ{,}3093$ daha iyi bir çözümdür.

Çözümü daha da iyi bir hale getirmek istiyorsak

E_1 değerini denklemde yerine koyarız.

$$M_1 = 54^\circ{,}3093 - 11^\circ{,}459 \sin 54^\circ{,}3093 = 45^\circ{,}0024$$

$$\Delta M_1 = M - M_1 = 45^\circ - 45^\circ{,}0024 = -0^\circ{,}0024$$

$$\Delta E_1 = \frac{\Delta M_1}{1 - e \operatorname{Cos} E_1} = \frac{-0^\circ{,}0024}{1 - 0{,}2 \cos 54^\circ{,}3093} = \frac{-0^\circ{,}0024}{0{,}8833} = -0^\circ{,}0027$$

$$E_2 = E_1 + \Delta E_1 = 54^\circ{,}3093 - 0{,}0027$$

$E_2 = 54{,}^\circ 3066$ daha iyi bir çözümdür.

Bundan sonra tekrarlamaya devam etmek çözdüğümüz problemin cinsine bağlıdır. E_2 değeri denklemde yerine koyulursa görülürki $M_2 = 45^\circ{,}0000$ çıkmaktadır. Yâni bulduğumuz E_2 kökü, denklemi virgülden sonra dördüncü haneye kadar sağlamaktadır. Eğer daha hassas bir kök istiyorsak devam ederiz, aksi halde tekrar etmeyiz ve $E = 54{,}^\circ 3066$ yı Kepler denkleminin çözümü olarak alırız.