3-Cisim Problemi

3-cisim problemi, ilk olarak Newton tarafından 1687'de Principia'da çözülen iki-cisim probleminden doğal olarak izlenen klasik bir astronomik ve fiziksel problemdir. İlk düşüncesinden bu yana birçok bilim adamı ve matematikçi bu problemi ve hareket olarak iyi bir neden olarak değerlendirmişlerdir. Dünya'nın ve Güneş'in etrafındaki diğer gezegenlerin kesinlikle iki bedenli bir problemi yoktur: 18. Yüzyıldaki pek çok bilim adamı, diğer gezegenlerin ekstra güçlerinin Dünya'ya neden olabileceğinden endişe ettikleri için, bu problemi keşfettiler. birkaç bin yıllık, yörüngesini değiştirmek ve ya güneşe dalmak ya da uzaya uçmak. Bununla birlikte, yüzyıllar süren araştırmalara rağmen, problemi basitleştirebilecek koordinat dönüşümleri olmadığından genel üç-cisim problemine çözüm yoktur; iki-cisim probleminden ya da sınırlı üç-cisim probleminden farklı olarak (kitlelerden birinin diğer iki kütleye kıyasla ihmal edilebilir olduğu bir sorun), çünkü karşılıklı kuvvetlerin vektörleri kütle merkezi ile aynı hizada değildir. Her bir bedenin diğer iki organın hareketleriyle birlikte düşünülmesi gerekir. Bazıları, yani 1912'deki Sundman, genel problemi çözmek için seri açılımlar yaratmış olsa da, bu genişlemelerin zayıf yakınsamasından dolayı, sorunun doğadaki kaosun iyi bir örneği olduğunu ve sadece sayısal entegrasyon yoluyla simüle edilebildiğini görebiliyoruz. Yine de, üç-cisim probleminin astrofiziksel önemi nedeniyle, birçoğu bu problemi keşfetmeye devam ediyor, simülasyonlar yaratıyor ve özel durumlar arıyor..

Böyle bir özel durum 1913'te Barrau tarafından keşfedilen Pisagor problemidir: bu problemde kitleler 3, 4, 5 olarak ayarlanmış ve Pisagor dik üçgenin köşelerine yerleştirilmiştir.

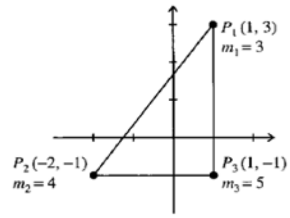
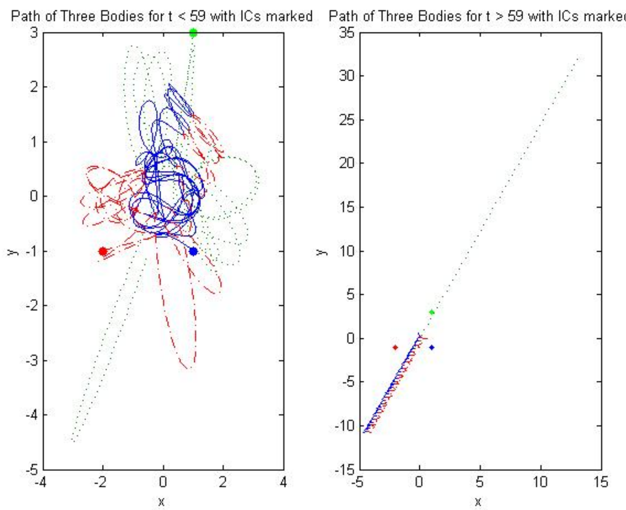


Figure 1.1 Initial configuration of the Pythagorean problem.

Cisimler harekete başlarken, serbest bırakıldıklarında birbirlerine yaklaşırlar, yakın bir karşılaşma geçirirler ve daha sonra cesetlerden birinin uçup kalan iki formu bir ikili olduğu zaman geri çekilirler..



Daha sonraki çalışmalar bu davranışın başlangıçta üç gövdeli sistemlere oldukça tipik olduğunu gösterdi: yakın iki vücut yaklaşımından sonra üçüncü beden uçar. Güçlü bir şekilde etkileşen üç gövdeli sistemler bile sınırlı bir ömre sahiptir ve biz doğada çok fazla şey bulmayı beklemiyoruz. Yine de, ilk üçüncül problemin, Pisagor Sorunu'nu kullanarak ilk örnek olarak etkileşimini modellemeye karar verdim.

Her bir parçacığın hareket denklemleri için çözdüğüm genel üç beden problemini incelemek için. Newton'un İkinci Yasasını göz önünde bulundurarak, her bir nesneyi etkileyen gücün:

$$\boldsymbol{F}_i = -G \sum_{j=1, j\neq i}^{n} m_i m_j \frac{1}{(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)^2} \frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}$$

ve,

$$\boldsymbol{F}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i) = m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i.$$

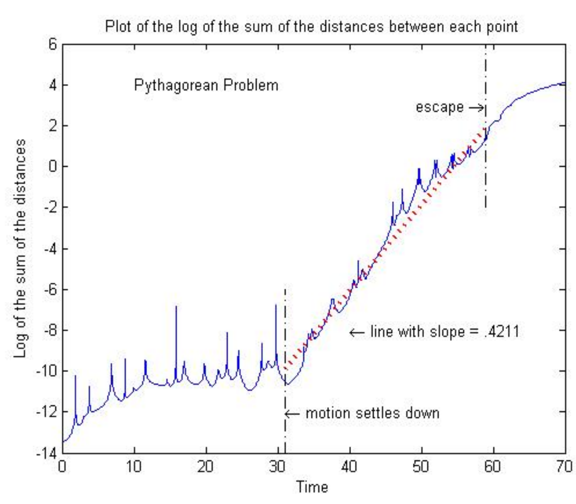
$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = -G \sum_{j=1, j\neq i}^{n} m_j \frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}^3},$$

Bu ikinci mertebeden diferansiyel denklemler, birleştirilmiş birinci mertebeden diferansiyel denklemler sistemine ayrılabilir; Tam sistem için hareket denklemleri için Ek A'ya bakınız. Çözümleri 18 boyutlu bir durum uzayından daha basit bir 12-boyutlu durum uzayına indirgemek için üç gövdeli eş-düzlem olarak kabul edildi. Kartezyen koordinatlarda çalışmak, x ve y'deki denklemler için çözümümü basitleştirdi.

Matlab ve ode45 diferansiyel denklem çözücüsünü (Runge-Kutta sayısal yaklaşma metodu) kullanarak, 1x10 ^ -10 rölatif ve mutlak hata toleransı ile partiküllerin çözümlerini çözebildik. Bununla birlikte, üçüncü parçacığın t ≈ 59 etrafında ikiliden kaçtığı göz önüne alındığında, yalnızca t <70 hareketi herhangi bir resimsel ilgiden kaynaklanır; t> 70 için, üç taneciğin hareketi, kütle merkezleri birbirinden doğrusal olarak birbirinden bağımsız hareket eden bir ikili ve bir üçüncü cisim tarafından doğru bir şekilde tahmin edilebilir (yukarıdaki şekle bakınız)

Genel üç-cisim probleminin kaotik doğasını ve hassas bağımlılığını incelemek için akışın önde gelen Lyapunov üssünü inceledim. Son derece benzer başlangıç koşullarına sahip iki parçacık kümesini piyasaya sürerek, Lyapunov üssünü, zamana göre benzer noktalar arasındaki mesafelerin toplamının günlüğünün değişim oranına bakarak buldum. Yani, ortalama olarak Lyapunov üslerini buldum. Gibi noktaların arasındaki mesafelerin günlüğünün eğimi.

Başlangıçta sınırlandırılmış üç-cisim sistemleri, Pisagor sorununda ve diğer üç-cisim problemlerinde olduğu gibi, bir ikiliye ve bir kaçan üçüncü parçacığa dönüştüğümde, sadece mesafelerin toplamının log oranını bulmak istedim. Üç cismin birbiriyle yakından etkileştiği zamanlara göre puan noktaları arasında. Pisagor Sorunu'nda, özellikle üzerinde çalıştığım problem, vücut t ≈ 59'da kaçar, bu yüzden sadece t noktasının toplamı arasındaki mesafenin toplamı için değişim oranını dikkate aldık t <59. Ayrıca, çünkü sistem karakteristik hareketine yerleşmek için biraz zaman alır, biz de sadece t> 31 olarak kabul ettik. 31 <t <59 göz önüne aldığımızda uzaklıkların toplamının eğiminin 0.4211 olduğunu bulduk ve böylece lider Lyapunov üssü sonucuna vardık 42 .4211. Bu, önde gelen Lyapunov üssünün genellikle tipik olduğunu iddia eden literatürle oldukça iyi anlaşıyor. ≈ ½.



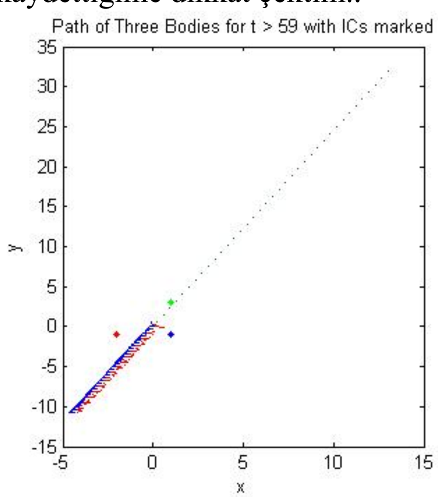
Benzer noktalar arasındaki mesafenin günlüğünün O (1) değerini aştığını unutmayın, bu da duyarlı bağımlılığı ve kaotik davranışları karakterize eder.

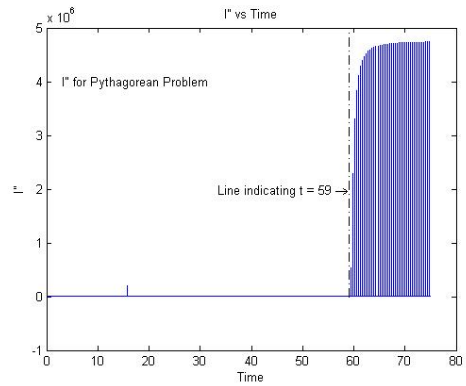
Genel Üç-Cicim Probleminde Kaçış

Daha önce ima ettiğim gibi, üç vücut problemi genellikle bir ikiliye ve kaçan üçüncü bir cisme bölünür ve kaçış koşullarını daha iyi anlamak istedim. Lagrange-Jacobi kimliğinde yararlı bir kaçış göstergesi bulabilir:

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2T + V = 2E - V$$

Eylemsizlik momenti sistemin "kompaktlığı" nı anladığından, eylemsizlik momenti büyürse daha büyük ve daha büyük bir sistemi çevrelemek için daha büyük bir küreye ihtiyaç duyulursa ve bu durumda I '0 olduğunda sınırlayıcı küre daha büyük bir oranda genişler. . Pratikte, bu yüzden, ben genellikle 0 bir vücut kaçışını gösterir. Pisagor problemi için I 'değerini hesapladım ve sistemden üçüncü cismin kaçışının, aynı anda, sıfırdan daha uzun bir süre ısrar ettiğimi kaydettiğime dikkat çektim..





Sınırlı 3-cisim Problemi

1155/5000
Kısıtlı üç-cisim problemi, bir cismin kütlesinden birinin ("üçüncü cisim"), iki cismin kütlesine ("primerler") ve sınırlı üç-cisim sorununa göre ihmal edilebilir olduğu bir sorundur. yıldız, gezegen ve asteroit veya uydudan oluşan bir sistem için iyi bir model olarak hizmet edebilir (asteroid / uydu << kütlesi veya yıldız kütlesi gibi, bunun sınırlı üç gövdeli bir problem olduğunu görebiliriz). Bu problemi araştırmak için, dönen atalet referans çerçevesindeki kısıtlı üç vücut problemini ele aldık.

Atalet referans çerçevesi, kökenin kütle merkezi olduğu ve referans çerçevenin, primerlerin (örneğin bir yıldız ve bir gezegen) oluşturduğu ikili sistemle aynı hızda döneceği şekilde ayarlanır; Böyle bir çerçevede, primerler sabit kalırken, üçüncü gövde (örneğin bir uydu veya asteroit) bunlar etrafında döner. Çerçeveyi, ön kenarların, daha ağır birincil (örn. Yıldız) istirahat μ ünitelerinin, yatay eksende hem merkezden uzak, hem de üçüncü cismin pozisyonu ile ölçeklendirilmiş 1 birim mesafe ile ayrılması için kurduk. (ξ, η):

$$\ddot{\xi} - \dot{\eta} = \dot{\eta} + \xi + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}\right),$$
$$\ddot{\eta} + \dot{\xi} = -\dot{\xi} + \eta + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}\right).$$

burada:

$$\rho_1{}^2 = (\xi + \mu)^2 + \eta^2,$$
$$\rho_2{}^2 = (\xi - (1-\mu))^2 + \eta^2.$$

Bu ikinci mertebeden diferansiyel denklemler, birleştirilmiş birinci mertebeden diferansiyel denklemler sistemine bölünebilir. Dönen çerçeve içinde hareket denklemlerinin ve eşleştirilmiş birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemlerinin daha tam bir türevi için.

Üç cisim probleminin ilginç bir yönü, gezegensel modelleme için son derece geçerli oldukları için Lagrangian noktalarının varlığıdır. Lagrange noktaları ya da librasyon noktaları, “sadece yer çekiminden etkilenen küçük bir nesnenin kuramsal olarak iki büyük nesneye göre durağan olabileceği yörünge konfigürasyonundaki beş konumdur.” Kısıtlı üç-cisim problemi için bu noktaları yerler olarak görebiliriz. burada, iki ortak yörünge öncülü ile aynı döneme sahip dönen referans çerçevesinde, yerçekimi kuvveti, üçüncü cismin ilk iki cisme göre bir dinlenmeye izin veren merkezkaç kuvveti dengelemektedir.
Lagrangian noktaları nerede bulunur:

$$\dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$$

:

$$\xi - \frac{(1-\mu)(\xi+\mu)}{\rho_1{}^3} - \frac{\mu(\xi-(1-\mu))}{\rho_2{}^3} = 0,$$

burada:

$$\eta - \frac{(1-\mu)\eta}{\rho_1{}^3} - \frac{\mu\eta}{\rho_2{}^3} = 0.$$

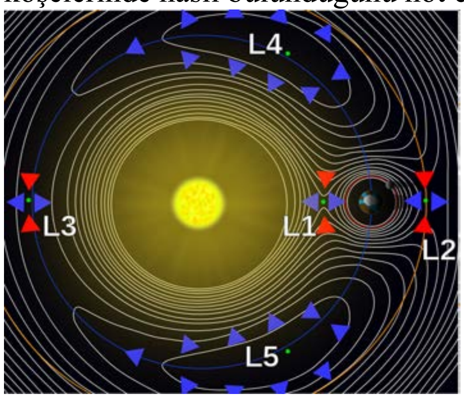
η = 0 olduğunda, ilk denklem aşağıdaki üç koşulu verir:

$$\xi - \frac{1-\mu}{(\xi+\mu)^2} - \frac{\mu}{(\xi-(1-\mu))^2} = 0, \qquad 1-\mu < \xi,$$
$$\xi - \frac{1-\mu}{(\xi+\mu)^2} + \frac{\mu}{(\xi-(1-\mu))^2} = 0, \qquad -\mu < \xi < 1-\mu,$$
$$\xi + \frac{1-\mu}{(\xi+\mu)^2} + \frac{\mu}{(\xi-(1-\mu))^2} = 0, \qquad \xi < -\mu.$$

η ≠ 0 olduğunda 2. eşitlik şunu verir:

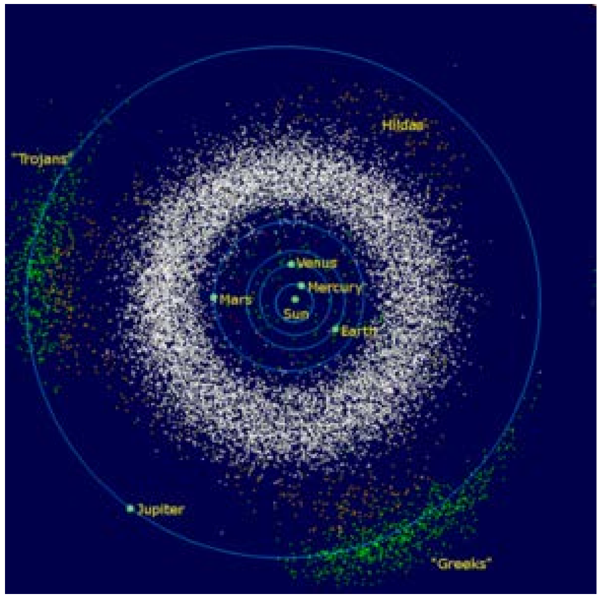
$$\xi = \frac{1}{2} - \mu,$$
$$\eta = \pm\sqrt{3}/2.$$

η = 0 için ilk denklemi yerine getiren noktalar üçüncü Lagrange noktaları veya “L3” noktalarıdır, η = 0 için ikinci denkleme uyan noktalar ilk Lagrange noktaları veya “L1” noktalarıdır ve üçüncü denkleme uyan noktalardır. η = 0 için ikinci Lagrange noktaları veya “L2”. H ≠ 0 denklemine uyan noktalar η = ½ * $\sqrt{}$3 ve L5 η = -½ * $\sqrt{}$3 olduğunda L4'tür. L4 ve L5'in Lagrange noktaları ve iki primer tarafından oluşturulan eşkenar üçgenlerin köşelerinde nasıl bulunduğunu not edin.



Lagrangian Noktaları ve Uygulamaları

Lagrangian noktaları son derece faydalıdır ve hem doğa hem de teknolojide birçok uygulamaya sahiptir. Güneş sistemimizde, Güneş-Jüpiter sisteminin Lagrangian noktaları hakkında kararlılık bölgesinde olan “Trojan” asteroitlerinde Lagrangian'ın istikrarının en durağanlığını görebiliyoruz:



Kararlı yörüngeye sahip Trojan asteroitlerinin L4 ve L5 noktalarında nasıl birleştiğini, Jüpiter ve Güneş ile eşkenar üçgenler oluşturan noktaları diğer iki nokta olarak not edin.

.