# BÖLÜM 6

# PERTÜRBASYON TEORİSİ

## 6.1 Bozucu fonksiyon.

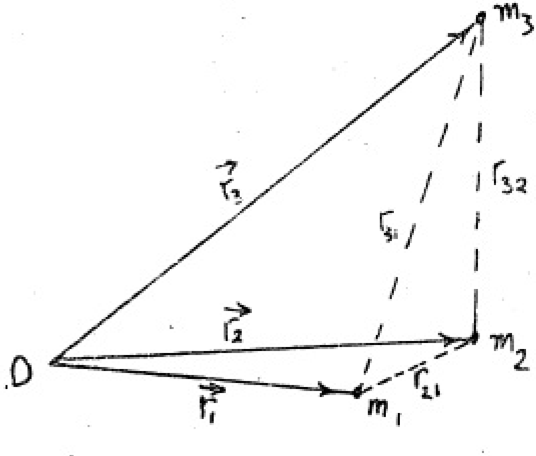
Uzaydaki herhangi üç $m_1$, $m_2$, $m_3$ cisminin bir O koordinat merkezine göre hareket denklemlerini

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3_{12}} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - G \frac{m_1 m_3}{r^3_{13}} (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \tag{1}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_2 m_3}{r^3_{23}} (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) - G \frac{m_2 m_1}{r^3_{21}} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{2}$$

$$m_3 \ddot{\vec{r}}_3 = -G \frac{m_3 m_1}{r^3_{31}} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - G \frac{m_3 m_2}{r^3_{32}} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \tag{3}$$

olarak Bölüm 5 te elde etmiştik.




Bilindiği gibi eğer $m_3$ cismi olmasaydı geriye iki cisim kalacak ve küçük $m_2$ cismi büyük $m_1$ cismi etrafında bir Kepler elipsi çizecekti. Bu bölümde $m_3$ cisminin çekim tesiri ile bu elips üzerinde meydana gelecek küçük değişiklikleri göreceğiz. Bu bozucu tesirleri veren teoriye 'pertürbasyon (tedirginlik) teorisi' denir.

$m_2$ cisminin $m_1$ ve $m_3$ ün etkisi altında $m_1$ etrafındaki hareket denklemi (2)–(1) den elde edilir:

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -G\,\frac{m_2+m_1}{r^2_{21}}\;\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{r_{21}} + G\,\frac{m_3}{r^2_{32}}\;\frac{\vec{r}_3-\vec{r}_2}{r_{32}} - G\,\frac{m_3}{r^2_{31}}\;\frac{\vec{r}_3-\vec{r}_1}{r_{31}}$$

$$\text{veya}\quad \ddot{\vec{r}}_{21} = -G\,\frac{m_2+m_1}{r^2_{21}}\;\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} + G\,\frac{m_3}{r^2_{32}}\;\frac{\vec{r}_{32}}{r_{32}} - G\,\frac{m_3}{r^2_{31}}\;\frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}} \qquad (4)$$

Şimdi aşağıdaki kabulleri yapalım.

$m_1 = m_o$ : Güneş

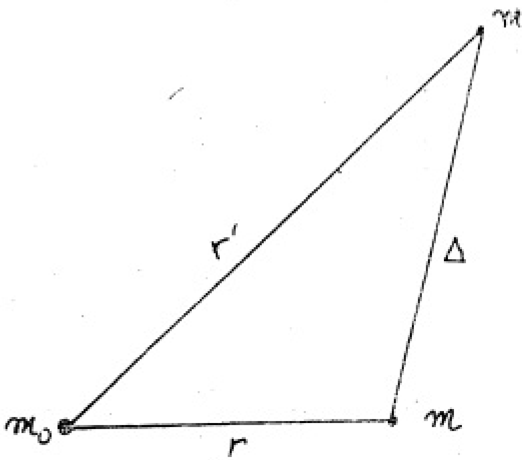
$m_2 = m$ : herhangibir gezegen

$m_3 = m'$ : m in hareketini bozan ikinci bir gezegen

$r_{21} = r$

$r_{32} = \Delta$

$r_{31} = r'$




Bunları (4) te yerlerine koyalım.

$$\ddot{\vec{r}} = -G\,\frac{m_o+m}{r^2}\;\frac{\vec{r}}{r} + G\,\frac{m'}{\Delta^2}\;\frac{\vec{\Delta}}{\Delta} - G\,\frac{m'}{r'^2}\;\frac{\vec{r}'}{r'} \qquad (5)$$

elde ederiz.

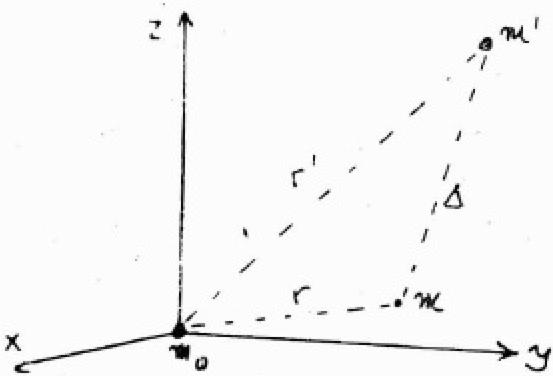
Güneş merkezli x, y, z dik koordinatlar sisteminde r nin koordinatları (x, y, z) ve r′ nün koordinatları (x′, y′, z′) ise, (5) denklemi bize aşağıdaki üç diferansiyel denklemi verir.

$$\ddot{x} = -G\,\frac{m_o+m}{r^2}\;\frac{x}{r} + G\,\frac{m'}{\Delta^2}\;\frac{x'-x}{\Delta} - G\,\frac{m'}{r'^2}\;\frac{x'}{r'}$$

$$\ddot{y} = -G\,\frac{m_o+m}{r^2}\;\frac{y}{r} + G\;\frac{m'}{\Delta^2}\;\frac{y'-y}{\Delta} - G\;\frac{m'}{r'^2}\;\frac{y'}{r'}$$

$$\ddot{z} = -G\,\frac{m_o+m}{r^2}\;\frac{z}{r} + G\;\frac{m'}{\Delta^2}\;\frac{z'-z}{\Delta} - G\;\frac{m'}{r'^2}\;\frac{z'}{r'}$$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ ve




$\Delta^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$ olduğundan, yukardaki üç denklem

$$\ddot{x} = -G\,\frac{m_o+m}{r^2}\;\frac{x}{r} + \frac{\partial}{\partial x}\;[G\,\frac{m'}{\Delta} - Gm'\;\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}]$$

$$\ddot{y} = -G\,\frac{m_o+m}{r^2}\;\frac{y}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\;[G\,\frac{m'}{\Delta} - Gm'\;\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}]$$

$$\ddot{z} = -G\,\frac{m_o+m}{r^2}\;\frac{z}{r}\qquad\frac{\partial}{\partial z}\;[G\,\frac{m'}{\Delta} - Gm'\;\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}]$$

şeklinde yazılabilir. $\mu = G\,(m_o+m)$ ve $R = Gm'\;[\;\frac{1}{\Delta} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}]$

dersek, denklemlerimiz

$$\ddot{x} + \mu\;\frac{x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\ddot{y} + \mu\;\frac{y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y} \qquad (6)$$

$$\ddot{z} + \mu\;\frac{z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial Z}$$

haline gelir. (6) diferansiyel denklem sistemi; kütlesi m olan bir gezegenin, kütlesi $m_o$ olan Güneşin ve kütlesi $m'$ olan diğer bir gezegenin çekim etkisi altında, Güneş etrafındaki hareketinin denklemidir. Burada R ye 'bozucu fonksiyon' adı verilir.

### 6.2 Lagrange gezegen denklemleri.

(6) diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü mevcut değildir. Yaklaşık bir çözüm için çeşitli metodlar mevcuttur. Biz burada 'parametrelerin değişimi' metodunu uygulayacağız. Dikkat edilirse, üçüncü cisim olmadığı takdirde $m' = 0$ ve dolayısiyla da bozucu fonksiyon $R = 0$ dir. Geriye

$$\ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} = 0$$

$$\ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} = 0$$

$$\ddot{z} + \mu \frac{z}{r^3} = 0 \qquad (7)$$

kalır. (7) diferansiyel denklemleri iki-cisim probleminde m in $m_o$ etrafındaki hareketinin denklemleridir. (7) nin çözümü bilindiği gibi bir konik kesmesi (elips, hiperbol, parabol veya daire) dir. Yörüngenin elips olması halinde, bu elipsin büyüklük, şekil ve uzayda ki durumu a, e, i, $\Omega$, $\omega$, T elemanları ile belirlenir.

Parametrelerin değişimi metodunda önce bu elemanlar hesap edilir. Sonra bu elemanlar yardımıyla m in $m_o$ merkezli (x, y, z) dik koordinatlar sisteminde x, y, z koordinatları

$$\begin{aligned} x &= f_1 (a, e, i, \Omega, \omega, T, t) \\ y &= f_2 (a, e, i, \Omega, \omega, T, t) \qquad (8) \\ z &= f_3 (a, e, i, \Omega, \omega, T, t) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir (bak. 4. 8). Burada t, koordinatları hesap etmek istediğimiz anı göstermektedir.

(8) denklemleri herhangi bir t anında m in koordinatlarını verir ve böylece de iki-cisim problemi tamamen çözülmüş olur.

Şimdi (6) denklemlerinin ikinci taraflarını göz önüne alalım. Yâni $m'$ nün bu elips üzerinde meydana getireceği bozucu etkileri inceliyelim. Bu durumda elips, bozucu etkilerin altında şekil, büyüklük ve uzayda ki konumunu devamlı olarak değiştirecektir. Diğer bir deyişle a, e, i, $\Omega$, $\omega$, T elemanları artık sabit olmayacak zamanın, yâni t nin bir fonksiyonu olacaktır. Bu kabul altında (8) deki x, y, z koordinatları ve bunların ikinci türevleri (6) denklemlerinde yerlerine konur ve elde edilecek bağıntılardan a, e, i, $\Omega$, $\omega$, ve T nin t ye göre birinci türevleri elde edilir. Parametrelerin veya keyfî sabitlerin değişimi adı altında diferansiyel denklemler teorisinde çok iyi bilinen bu metod, Lagrange tarafından gök mekaniğine uygulanmış ve Lagrange gezegen denklemleri denilen aşağıda ki denklemler elde edilmiştir (Kaynak 2, Bölüm 11):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left\{ \sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\partial R}{\partial \omega} \right\}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \left\{ \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \cos i \frac{\partial R}{\partial \omega} \right\}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \tag{9}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}$$

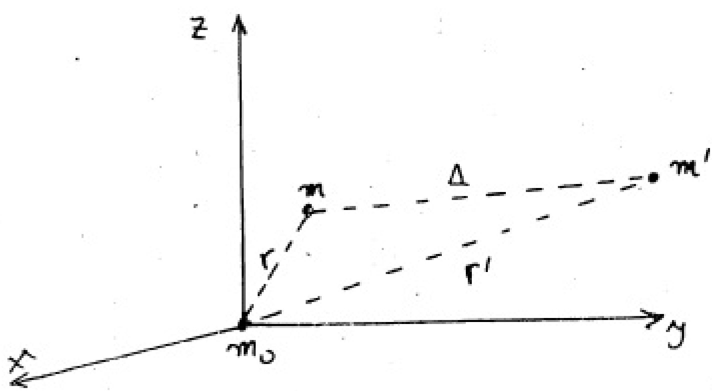
Son yörünge elemanı olan T yerine ona M = n (t – T) ile bağlı olan M in kullanılması kolaylık sağlar. (9) denklemlerini kullanabilmek için önce R bozucu fonksiyonunun yörünge elemanları cinsinden hesap edilmesi gerekir.

### 6.3 Lagrange gezegen denklemlerinin Ay'ın hareketine uygulanması.

Ay'ın Yer etrafındaki hareket teorileri çok zordur. Zira bir peyk olarak Ay'ın kütlesi çok büyüktür ve üstelik Yer'e de yakındır. Ay Yer etrafında gezerken Güneş tarafından bozulmaktadır. O halde, problem bir üç cisim problemi olarak incelenebilir.

Ana cisim kütlesi $m_o$ olan Yer, hareketi incelenecek olan cisim kütlesi m olan Ay ve bu hareketi bozan cisim de kütlesi m′ olan Güneş olsun. Ay'ın Yer merkezli dik koordinatları x, y, z, ve Güneşin Yer merkezli dik koordinatları x′, y′, z′ olsun. O zaman Ay'ın hareket denklemleri

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x} \\
\ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y} \\
\ddot{z} + \mu \frac{z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{10}
$$




şeklindedir. Burada $R = Gm' \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3} \right]$ bozucu fonksiyondur.

(10) denklemlerinin ikinci tarafları sıfıra eşitlenir ve çözülürse Ay'ın Yer etrafındaki bozulmamış hareketinin yörünge elemanları olan a, e, i, Ω, ω, T elde edilir. Yer'in Güneş etrafındaki veya Yeri sabit telakki ettiğimize göre Güneşin Yer etrafındaki hareketinin yörünge elemanları da a′, e′, i′, Ω′, ω′, T′ olsun.

(9) denklemlerini uygulayabilmek için evvelâ R yi bu yörünge elemanları cinsinden hesap edelim. Hesapları kolaylaştırmak için Ay'ın yörüngesini ekliptik düzlem üzerinde kabul edelim. O zaman $i = O$ olur (gerçekte $i \simeq 5°$ dir). Yer'in yörüngesini de dairesel alalım O zaman $e' = O$ olur (gerçekte $e' \cong 0{,}016$ dır).

Bu kabuller altında Yer, Ay ve Güneş aynı düzlemde olacaklarından z koordinatına lüzum kalmaz.

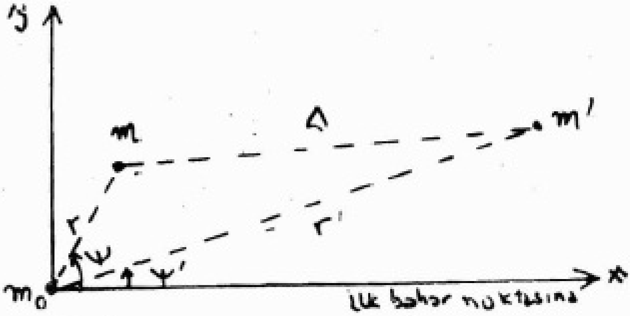
Ay'ın göksel boylamı : $\Psi$

Güneşin göksel boylamı : $\Psi'$ olsun.

Kosinüs teoreminden

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\Psi - \Psi')$$

$$= r'^2 \{1 + (\frac{r}{r'})^2 - 2(\frac{r}{r'}) \cos(\Psi - \Psi')\}$$




Buradan

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} \{ 1 - [-(\frac{r}{r'})^2 + 2(\frac{r}{r'}) \cos(\Psi - \Psi')]\}^{-1/2} \quad (11)$$

Diğer taraftan $\alpha$ herhangi kemiyet olmak üzere binom açılımından

$$(1-\alpha)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \alpha^k$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 + \ldots$$

Bu açılımı $\alpha = [(-\frac{r}{r'})^2 + 2(\frac{r}{r'}) \cos(\Psi - \Psi')]$ olmak üzere (11) e uygularsak

$$\{1-[-(\frac{r}{r'})^2 + 2(\frac{r}{r'}) \cos(\Psi-\Psi')]\}^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}[-(\frac{r}{r'})^2 + 2(\frac{r}{r'})$$

$$\cos(\Psi-\Psi')] + \frac{3}{8}[-(\frac{r}{r'})^2 + 2\frac{r}{r'}\cos(\Psi-\Psi')]^2 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{4}(\frac{r}{r'})^2 + (\frac{r}{r'})\cos(\Psi-\Psi') + \tfrac{3}{4}(\frac{r}{r'})^2 \cos 2(\Psi-\Psi') + \ldots$$

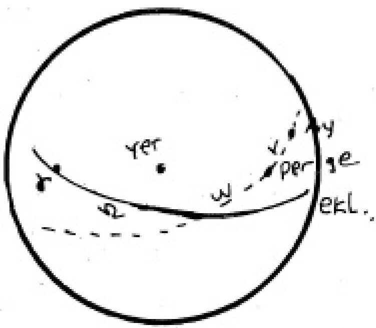
elde ederiz. Bu açılımda r / r′ nün ikinci dereceden büyük olan terimleri ihmal edilmiştir. Bu sonucu (11) de yerine koyarsak

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} \{ 1 + (\frac{r}{r'}) \cos(\Psi' - \Psi'') + \frac{1}{4} (\frac{r}{r'})^2 + \frac{3}{4} (\frac{r}{r'})^2 \cos 2 (\Psi' - \Psi'') \}$$

buluruz. Diğer taraftan $\frac{xx' + yy'}{r'^3} = \frac{rr' \cos(\Psi' - \Psi'')}{r'^3}$ tür. Yerin yörüngesini dairesel aldığımıza göre $r' = a'$ yazabiliriz. Bütün bunları R de yerlerine koyarsak ve kısaltırsak

$$R = \frac{Gm'}{a'} \{ 1 + \frac{1}{4} (\frac{r}{a'})^2 + \frac{3}{4} (\frac{r}{a'})^2 \cos 2 (\Psi' - \Psi'') \}$$

elde ederiz.




Şimdi $\Psi' = \Omega + \omega + v$ bağıntısını kullanarak

$$(\frac{r}{a})^2 \cos 2 (\Psi' - \Psi'') = (\frac{r}{a})^2 \cos \{ 2v + 2 (\Omega + \omega - \Psi'') \}$$

$$= 2 (\frac{r}{a})^2 \cos^2 v \cos 2 (\Omega + \omega - \Psi'') - (\frac{r}{a})^2 \cos 2 (\Omega + \omega - \Psi'')$$

$$-2 [\frac{r}{a} \sin v] [\frac{r}{a} \cos v] \sin 2 (\Omega + \omega - \Psi'') \quad (13)$$

Diğer taraftan eliptik açılımlardan (bak. Kaynak 2, Bölüm 2),

$$(\frac{r}{a})^2 = 1 + \frac{3}{2} e^2 - 2e \cos M - \frac{e^2}{2} \cos 2M$$

$$\frac{r}{a} \cos v = (1 - \frac{3}{8} e^2) \cos M + \frac{1}{2} e \cos 2M + \frac{3}{8} e^2 \text{cso} 3M - \frac{3}{2} e$$

$$\frac{r}{a}\sin v = (1-\frac{5}{8}e^2)\sin M + \frac{1}{2}e\sin 2M \quad \frac{3}{8}e^2\sin 2M \tag{14}$$

olduğu bilinir. (14) bağıntıları (13) te yerlerine koyulur ve sonra (12) ye nakledilirse, Ayın hareketini bozan fonksiyon olarak

$$R = n'^2a^2\{\frac{3}{8}e^2 - \tfrac{1}{2}e\cos M - \frac{1}{8}e^2\cos 2M + \frac{15}{8}e^2\cos(2\Omega+2\omega-2\Psi')$$

$$-\frac{9}{4}e\cos(2\Omega+2\omega-2\Psi'+M) + \tfrac{3}{4}\cos(2\Omega+2\omega-2\Psi'+2M) - \frac{15}{8}e^2\cos$$

$$(2\Omega+2\omega-2\Psi'+2M) + \tfrac{3}{4}e\cos(2\Omega+2\omega-2\Psi'+3M) + \tfrac{3}{4}e^2\cos$$

$$(2\Omega+2\omega-2\Psi'+4M)\} \tag{15}$$

elde edilir Burada $n'^2 = \dfrac{Gm'}{a'^3}$ tür.

Şimdi yapılacak iş (15) ten $\dfrac{\partial R}{\partial a}$, $\dfrac{\partial R}{\partial e}$, $\dfrac{\partial R}{\partial i}$, $\dfrac{\partial R}{\partial \Omega}$, $\dfrac{\partial R}{\partial \omega}$, $\dfrac{\partial R}{\partial M}$ leri bulmak, bunları (9) denklemlerinde yerlerine koymak ve integre ederek bozulmuş a, e, i, $\Omega$, $\omega$, T değerlerini elde etmektir. Biz burada, yukarıda söylediklerimizi sadece R deki bir tek terimi alarak göstereceğiz. Diğer terimler için de aynı yol takip edilir.

Örnek terim olarak parantez içindeki altıncı terimi alalım: O zaman $R = \frac{3}{4}n'^2a^2\cos(2\Omega+2\omega-2\Psi'+2M)$ olacaktır. Buradan,

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{3}{2}n'^2a\cos(2\Omega+2\omega-2\Psi'+2M)$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial i} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = -\frac{3}{2}n'^2a^2\sin(2\Omega+2\omega-2\Psi'+2M)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = -\frac{3}{2}n^{2\prime}a^2\sin(2\Omega+2\omega-2\Psi'+2M)$$

$$\frac{\partial R}{\partial M} = -\frac{3}{2}n'^2a^2\sin(2\Omega+2\omega-2\Psi'+2M)$$

bulunur. Bu değerleri (9) deklemlerinde yerlerine koyar ve kısaltırsak,

$$\frac{da}{dt} = -\frac{3n'^2}{n} \sin(2\Omega + 2\omega - 2\Psi' + 2M)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{3n'^2 \sqrt{1-e^2}}{2ne} \sin(2\Omega + 2\omega - 2\Psi' + 2M)$$

$$\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \qquad (17)$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{3n'^2}{n} \cos(2\Omega + 2\omega - 2\Psi' + 2M)$$

Şimdi (17) diferansiyel denklemlerinin nasıl integre edildiklerini göreceğiz:

Bir $t_o$ anında Ay'ın ve Güneş'in yörünge elemanları tayin edilir. Bu elemanlar $a_o$, $e_o$, $i_o$, $\Omega_o$, $\omega_o$, $T_o$ ve $a'_o$, $e'_o$, $i'_o$, $\Omega'_o$, $\omega'_o$, $T'_o$ olsun. O zaman $\Psi_o' = \Omega'_o + \omega_o' + n'_o (t - T'_o)$ ve $M_o = n_o (t-T_o)$ olacaktır. Bunları (17) denklemlerinin ikinci taraflarında yerlerine koyalım.

$$\frac{da}{dt} = -\frac{3n_o'^2}{n_o} \sin 2\left[\Omega_o + \omega_o - \Omega'_o - \omega'_o + n'_o T'_o - n_o T_o - (n'_o - n_o)t\right]$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{3n'_o \sqrt{1-e_o^2}}{2n_o e_o} \sin 2\left[\Omega_o + \omega_o - \Omega'_o - \omega'_o + n'_o T'_o - n_o T_o - (n'_o - n_o)t\right]$$

$$\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0 \qquad (18)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$\frac{dM}{dt} = n_o - \frac{3n'_o}{n_o} \cos 2\left[\Omega_o + \omega_o - \Omega'_o - \omega'_o + n_o' T'_o - n_o T_o - (n'_o - n_o)t\right]$$

(18) diferansiyel denklemlerinin sağ tarafları artık sadece t nin (zamanın) fonksiyonudur ve dolayısiyle kolayca integre edilebilir. İntegre ederken doğacak olan integrasyon sabitlerini $t_o$ anı için hesap etmiş bulunduğumuz yörünge elemanları olarak seçeriz. Böylece elde edeceğimiz a, e, i, Ω, ω, T elemanları artık bozulmuş elemanlar olacaklardır.

$$a = a_o - \frac{3n'^2_o}{2n_o(n'_o - n_o)} \cos 2 \left[\Omega_o + \omega_o - \Omega'_o - \omega'_o + n'_o T'_o - n_o T_o - (n'_o - n_o)t\right]$$

$$e = e_o + \frac{3n'_o\sqrt{1 - e^2_o}}{2e_o n_o(n_o' - n_o)} \cos 2 \left[\Omega_o + \omega_o - \Omega'_o - \omega'_o + n_o' T'_o - n_o T_o - (n'_o - n_o)t\right]$$

$$i = i_o = 0 \qquad (19)$$

$$\Omega = \Omega_o$$

$$\omega = \omega_o$$

$$M = M_o + \frac{3n'_o}{2n_o(n'_o - n_o)} \sin 2 \left[\Omega_o + \omega_o - \Omega'_o - \omega'_o + n'_o T'_o - n_o T_o - (n'_o - n_o)t\right]$$

Burada i nin sıfır oluşu başlangıçta $i_o$rı sıfır seçmemizden ileri gelmektedir. Son denklemde ise integrasyondan sonra $n_o t$ mevcuttur, sabiti de $-n_o T_o$ seçerek ikisi yerine $M_o$ yazmış olduk.

(19) denklemleri herangibir t anında ki yeni yörünge elemanlarını verir. Dikkat edilirse, bozucu fonksiyondan örnek olarak seçtiğimiz terimden dolayı Ω ve ω da bir değişme olmamaktadır. Bu terim sadece a, e, ve M yi değiştirmektedir. Aynı şekilde diğer terimlerin de etkileri hesap edilir ve sonuçlar birleştirilirse elemanlar üzerinde ki toplam bozucu etkiler elde edilmiş olacaktır.

Burada genel hatlarını izah ettiğimiz ve basit bir uygulamasını yaptığımız 'parametrelerin değişimi metodu'undan başka Encke metodu, Newcomb metodu, Hansen Metodu vs. gibi çok kullanılan diğer pertürbasyon metodları da mevcuttur. Bu metodlar özellikle Kaynak 2 de çok iyi bir şekilde bulunabilir. Pertürbasyonların geometrik anlamları içinse Kaynak 3 tavsiye edilir.