BÖLÜM 7

YÖRÜNGELERİN NÜMERİK İNTEGRASYONU

7.1 İnterpolasyon.

Bazı bağıntılar sadece bir tablo şeklinde elde edilebilir: gözlemler veya bir deneyin sonuçları gibi. Bu durumda serbest değişkenin (argüment'in) çeşitli değerleri için bağımlı değişken (fonksiyon) gözlemle veya deneyle elde edilmiş olacaktır. Eğer argümentin değerlerini bir sütuna ve bu değerlere karşılık gelen fonksiyon değerlerini de hemen yanındaki sütuna yazarsak iki sütunlu bir tablo elde ederiz.

Şimdi ardışık iki fonksiyon değerinin farklarını alıp bu iki değerin yazıldıkları satırların ortasına gelmek üzere yeni bir sütün meydana getirelim. Bu sütundaki değerlere birinci farklar, aynı yolla meydana gelecek yeni bir sütundaki değerlere ikinci farklar vs. diyeceğiz. Böylece elde edilecek sonuç tabloya ise 'farklar tablosu' adını vereceğiz. Aşağıda $y = x^3$ fonksiyonunun $x = 1, 2, 3, \ldots$ değerleri için teşkil edilmiş farklar tablosunu veriyoruz.

arg.	fonk.	1ci f.	2ci f.	3cü f.	4cü f.
0	0				
		1			
1	1		6		
		7		6	
2	8		12		0
		19		6	
3	27		18		0
					.
		37		6	
4	64		24	.	
		61	.		
5	125	.			
.	.				

Eğer tablomuz bir gözlemin sonuçlarını iktiva ediyorsa, o zaman birinci sütun, örneğin: zamanı, ikinci sütün ise örneğin: ölçülen bir değerler serisini gösterebilir.

Şimdi bu tabloyu notasyonel olarak aşağıdaki şekilde göstereceğiz:

FARKLAR TABLOSU

arg	f	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5
.	.					
		.				
$a - 3\omega$	f_{-3}		.			
		$f^1_{-5/2}$		.		
$a - 2\omega$	f_{-2}		f^2_{-2}		.	
		$f^1_{-3/2}$		$f^3_{-3/2}$		.
$a - \omega$	f_{-1}		f^2_{-1}		f^4_{-1}	
		$f_{1-1/2}$		$f^3_{-1/2}$		$f^5_{-1/2}$
a	f_0		f^2_0		f^4_0	
		$f^1_{1/2}$		$f^3_{1/2}$		$f^5_{1/2}$
$a + \omega$	f_1		f^2_1		f^4_1	
		$f^1_{3/2}$		$f^3_{3/2}$		.
$a + 2\omega$	f_2		f^2_2		.	
		$f^1_{5/2}$		.		
$a + 3\omega$	f_3		.			
		.				
..	.					

Buradaki ω ya tablo aralığı adı verilir. Dikkat edilirse, bu tabloda herhangi bir argümente karşılık gelen fonksiyon değeri mevcuttur. Fakat, tabloda olmayan bir argümente (örneğin: $a + q\omega$, $0 < q < 1$) karşılık olan fonksiyon değeri de yine tabloda olmayacaktır. İşte bu değeri bulmaya yarıyan formüllere interpolasyon formülleri denir. Aşağıda bugün için en çok kullanılan beş interpolasyon formülünden sadece birini veriyoruz.

Newton interpolasyon formülü:

$$f(a + q\omega) = f_o + q f^{1}{}_{1/2} + \frac{q(q-1)}{2\,!} f_1{}^2 + \frac{q(q-1)\,(q-2)}{3\,!} f_3{}^3/_2 + \dots \quad (1)$$

Uygulama: logcosh x'in değerleri $\omega = 0{,}002$ aralıkla aşağıda veriliyor.

x	logcosh x = f
0,360	0,0275 5462 3980
0,362	0,0278 5523 7805
0,364	0,0281 5737 9665
0,366	0,0284 6104 7438
0,368	0,0287 6623 8989
0,370	0,0290 7295 2180

Logcosh 0,3655 in değerini hesap edelim:

Bunun için önce farklar tablosunu teşkil ederiz.

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
0,360	0,0275 5462 3980				
		3 0061 3825			
0,362	0,0278 5523 7805		152 8035		
		3 0214 1860		— 2122	
0,364	0,0281 5737 9665		152 5913		—13
		3 0366 7773		— 2135	
0,366	0,0284 6104 7438		152 3778		—3
		3 0519 1551		— 2138	
0,368	0,0287 6623 8989		152 1640		
		3 0671 3191			
0,370	0,0290 7295 2180				

Bizden 0, 3655 in logcosh değeri isteniyor. Bu verilen sayı 0,364 ile 0,366 arasındadır. Dolayısıyla 0,364 ü a harfi ile gösterir ve diğer harfleri ona göre tabloya işaretleriz. $a + q\omega = x$ bağıntısından

$$0{,}364 + q\ 0{,}002 = 0{,}3655$$

denklemini, buradan da $q = \frac{3}{4}$ değerini buluruz. Şimdi q nün bu değerini ve f nin tabloda hazır olan değerlerini Newton formülünde yerlerine koyalım.

$$f(0{,}3655) = 0{,}0281\ 5737\ 9665 + \tfrac{3}{4} \times 0{,}0003\ 0366\ 7773 + \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)}{2\ !}$$

$$0{,}00000152\ 3778 + \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)\left(\frac{3}{4}-2\right)}{3\ !}\,(-0{,}00000002138)$$

$$= 0{,}0283\quad 89498\quad 7557$$

aranılan değerdir.

7.2 Sayısal (nümerik) türev.

Serbest değişkenle bağımlı değişken arasındaki f(x) bağıntısı biliniyorsa f(x) in türevinin herhangibir x=a için değerini bulmak için $f'(x)$ teşkil edilir ve burada x yerine a koyulur. Fakat, eğer elimizde serbest değişkenle bağımlı değişken arasında sadece bir tablo mevcutsa ozaman yukarıdaki yolu izleme imkânımız yoktur. Bu durumda aşağıdaki formülleri kullanırız:

Birinci türev alma formülü

$$\omega\ \frac{df(x)}{dx} = \left(\frac{f^1_{-1/2} + f^1_{1/2}}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{f^3_{-1/2} + f^3_{1/2}}{2}\right) + \frac{1}{30}\ \frac{(f^5_{-1/2} + f^5_{1/2})}{2} + \dots \qquad (2)$$

İkinci türev alma formülü:

$$\omega^2 \quad \frac{d^2f\ (x)}{dx^2} = f^2{}_o - \frac{1}{12}\ f_o{}^4 + \frac{1}{90}\ f_0{}^6 - \ldots \tag{3}$$

Uygulama: $f(x) = 2x^2 - 1$ fonksiyonunun $x = 2$ için birinci ve ikinci türevlerini sayısal olarak bulalım. Bunun için önce farklar tablosunu teşkil etmeliyiz. Tablo teşkil edilirken ilk aranılan şey tablo aralığının bilinmesidir. Farzedelim ki $\omega = 1$ seçilmiştir. O zaman, türev değeri istenen değeri a olarak kabul ederiz ve tabloya bu değerin üstünde ve altında üçer tane daha değer ilâve ederiz. Bu durumda farklar tablosu aşağıdaki gibi olacaktır.

x	f	f^1	f^2	f^3	$\frac{df}{dx}$	$\frac{d^2f}{dx^2}$
–1	1					
		–2				
0	–1		4			
		2		0		
1	1		4			
		6		0		
2	7		4		8	4
		10		0		
3	17		4			
		14		0		
4	31		4			
		18				
5	49					

Şimdi (2) ve (3) ten,

$$1 \times \left[\frac{d\,(2x^2-1)}{dx}\right]_{x=2} = \frac{6+10}{2} - \frac{1}{6} \times \frac{(0-0)}{2} = 8$$

$$1^2 \times \left[\frac{d^2\,(2x^2-1)}{dx^2}\right]_{x=2} = 4 - \frac{1}{12} \times 0 = 4$$

elde edilir. Eğer normal yolla türevler alınır ve $x = 2$ koyulursa yukarıda bulduğumuz sonuçların hiç hatası olmadığı görülür. Sonuçların tam oluşu üçüncü farkların tamamen sıfır olmasından ileri gelmektedir. Bu bir genel kaidedir, yâni ikinci dereceden bir polinomun üçüncü farkları sıfırdır, ki bu da ikinci dereceden bir polinomun üçüncü türevinin sıfır olmasına eşdeğerdir. Eğer tabloyu bir polinomdan değil de herhangibir fonksiyondan meydana getirseydik, farklar küçülmekle beraber hiç bir zaman sıfır olmayacak ve dolayısıyla da sayısal olarak elde ettiğimiz türevler tam hassas olmıyacaktır.

7.3 Sayısal (nümerik) integrasyon.

Sadece tablolar şeklinde bilinen fonksiyonel bağıntılarda, integrasyon aşağıda ki formüller yardımıyla yapılır. Bu formülleri yazmadan önce, farklar tablosunu sola doğru iki sütun genişleteceğiz. Birinci ve ikinci integrasyona karşılık gelen bu sütunları f nin sol üst tarafına yazacağımız 1 ve 2 sayıları ile göstereceğiz. Bu durumda genişletilmiş olan farklar tablomuz aşağıdaki gibi olacaktır.

arg	${}^2f$	${}^1f$	f	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5
$a - 3\omega$			f_{-3}					
				$f^1_{-5/2}$				
$a - 2\omega$			f_{-2}		f^2_{-2}			
				$f^1_{-3/2}$		$f^3_{-3/2}$		
$a - \omega$			f_{-1}		f^2_{-1}		f^4_{-1}	
				$f^1_{-1/2}$		$f^3_{-1/2}$		$f^5_{-1/2}$
a	${}^2f_0$		f_0		f^2_0		f^4_0	
		${}^1f_{1/2}$		$f^1_{1/2}$		$f^3_{1/2}$		$f^5_{1/2}$
$a + \omega$	${}^2f_1$		f_1		f^2_1		f^4_1	
		${}^1f_{3/2}$		$f^1_{3/2}$		$f^3_{3/2}$		
$a+2\omega$	${}^2f_2$		f_2		f^2_2			
		${}^1f_{5/2}$		$f^1_{5/2}$				
$a + 3\omega$	${}^2f_3$		f_3					

Bir katlı integral alma formülü:

$$\frac{1}{\omega}\int^{a} f(x)dx = {}^1f_{1/2} - \tfrac{1}{2} f_o - \frac{1}{12}\left(\frac{f^1_{-1/2} + f_1{}^1{}_{/2}}{2}\right) + \frac{11}{720}\left(\frac{f^3_{-1/2} + f_1{}^3{}_{/2}}{2}\right) - \cdots \qquad (4)$$

İki katlı integral alma formülü:

$$\frac{1}{\omega^2}\int^{a}\!\!\int f(x)dx^2 = {}^2f_o + \frac{1}{12} f_o - \frac{1}{240} f^2{}_o + \frac{31}{60480} f_o{}^4 - \cdots \qquad (5)$$

Uygulama 1: $x = 0$ iken $\int f(x)dx$ ve $\int\int f(x)dx^2 = 0$ olduğuna göre $f(x) = 3x^2 - 3$ fonksiyonunun bir ve iki katlı integrallerinin değerini $x = 1, 2, \ldots$ için bulalım.

Verilen fonksiyonun bir ve iki katlı integrallerinin değerleri $x = 0$ için bilindiğinden, bu değeri a olarak kabul ederiz ve bundan önceki ve sonraki üçer değeri tabloya yerleştirip bunlara karşılık gelen fonksiyon değerlerini ve farkları hesap ederiz. a ya karşılık gelen bir ve iki katlı integral değerleri zaten verilmiş durumdadır. Bunları da x ile ^2f arasında iki sütuna yazarız. Şu andaki durum aşağıdaki gibi olacaktır.

x	$\iint f(x)\,dx^2$	$\int f(x)\,dx$	^2f	^1f	f	f^1	f^2
–3					24		
						–15	
–2					9		6
						–9	
–1					0		6
						–3	
0	0	0			–3		6
						3	
1	•	•			0		6
						9	
2					9		6
						15	
3					24		

Şimdi (4) formülünden

$$\frac{1}{1} \times 0 = {}^1f_{1/2} - \tfrac{1}{2}(-3) - \frac{1}{12}\left(\frac{-3+3}{2}\right) \text{ buradan da}$$

${}^1f_{1/2} = -1{,}5$ elde ederiz. Bu değeri tabloda yerine koyarız ve ${}^1f_{3/2} - {}^1f_{1/2} = f_1$ den ${}^1f_{3/2} = -1{,}5$ sonra da ${}^1f_{5/2} - {}^1f_{3/2} = f_2$ den ${}^1f_{5/2} = 7{,}5$ buluruz ve bunları da tabloda yerlerine koyarız. Bu andan itibaren $\int f(x)\,dx$'i $x = 1$ için integre etmeye hazırız. Bunun için (4) formümülündeki indisleri bir çoğaltırız. (Dikkat edilmelidir ki bunun nedeni $x = 1$ için integre edeceğimizden değil sadece bir sonraki integrasyona geçtiğimizdendir).

$$\frac{1}{1}\int^{1} f(x)dx = {}^1f_{3/2} - \tfrac{1}{2} f_1 - \frac{1}{12}\left(\frac{f^1{}_{1/2} + f^1{}_{3/2}}{2}\right)$$

$$= 1{,}5 - \tfrac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{12}\left(\frac{3-9}{2}\right)$$

$$= -2{,}0$$

Böylece f(x) in bir katlı integralinin $x = 1$ için değeri $-2{,}0$ olarak elde edilmiş oldu. Bu değeri de tabloda $\int f(x)\,dx$ sütununa ve $x = 1$ in satırına yazarız. Bu, $x = 1$ için bir katlı integrasyon işlemini tamamlamış olur.

Aşağıda x = 1 için integre edildikten sonra tablonun durumu görülmektedir:

x	$\iint f(x)\,dx^2$	$\int f(x)\,dx$	${}^2f$	${}^1f$	f	f^1	f^2
—3					24		
						—15	
—2					9		6
						—9	
—1					0		6
						—3	
0	0	0			—3		6
				—1,5		3	
1		—2,0			0		6
				—1,5		9	
2					9		6
				7,5		15	
3					24		

Şimdi eğer integralin değerini x = 2 için bulmak istiyorsak formüldeki indisleri yeniden birer artırırız ve tabloda mevcut değerleri formülde yerlerine koyarak sonucu elde ederiz. Ve böylece de integrasyonu istenildiği kadar uzatabiliriz.

Şimdi de iki katlı integralin hesabına geçiyoruz: x = 0 için iki katlı integralin değeri verilmiş bulunduğundan (5) formülünden

$$\frac{1}{1^2} \times 0 = {}^2f_o - \frac{1}{12}(-3) - \frac{1}{240} \times 6$$

Buradan da ${}^2f_o = 0{,}28$ elde edilir. Bu değeri tabloda yerine koyarız ve ${}^2f_1$, ${}^2f_2$, ${}^2f_3$ değerlerini hesap edip onları da tabloya geçiririz. Bu anda iki katlı integral değerini x = 1 için bulmaya hazırız. Bunun için (5) formülündeki indisleri birer artırırız.

$$\frac{1}{1^2} \iint^{1} f(x)dx^2 = {}^2f_1 - \frac{1}{12}\, f_1 - \frac{1}{240}\, f_1{}^2$$

$$= -\, 1{,}22 - \frac{1}{12} \times 0 - \frac{1}{240} \times 6$$

$$= -\, 1{,}25$$

Bu değer $\iint f(x)dx^2$ nin x = 1 için değeridir. Bunu tabloda yerine koyarsak işlem tamamlanmış olur. Aşağıda bu durumu görüyoruz:

x	$\iint f(x)\,dx^2$	$\int f(x)\,dx$	${}^2f$	${}^1f$	f	f^1	f^2
—3					24		
						—15	
—2					9		6
						—9	
—1					0		6
						—3	
0	0	0	0,28		—3		6
				—1,5		3	
1	—1,25	—2,0	—1,22		0		6
				—1,5			
2			—2,72		9	9	6
				7 ,5			
3			4,78		24	15	

İntegralin değerini $x = 2$ için hesap etmek istiyorsak yine indisleri birer çoğaltmak ve yukarıda ki gibi işleme devam etmek gerekir. Ve böylece devam eder. ...

Uygulama 2. $t = 0$ iken $x_o = 1$ ve $\dot{x}_o = 1$ olduğuna göre

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \tag{1}$$

ikinci mertebe diferansiyel denkleminin $\omega = 0{,}1$ aralıkla nümerik integrasyonu:

Bu örnekte serbest değişken t olduğundan 7.3.4 ve 7. 3. 5 denklemleri

$$\frac{1}{\omega}\int^{a} f(t)dt = {}^1f_{1/2} - \tfrac{1}{2} f_o - \frac{1}{12}\left(\frac{f^1_{-1/2}+f^1_{1/2}}{2}\right) + \frac{11}{720}\left(\frac{f^3_{-1/2}+f^3_{1/2}}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\omega^2}\iint^{a} f(t)dt^2 = {}^2f_o + \frac{1}{12} f_o - \frac{1}{240} f^2_o + \frac{31}{60480} f^4_o - \dots \tag{2}$$

şeklindedirler. İkinci denklemden görüleceği üzere sağ taraftaki farklar hesap edildikten sonra ω^2 ile çarpılacak ve ondan sonra x elde edilecektir. Pratikte bu çarpma işlemi başlangıçtan yapılır. Dolayısıyla (1) yerine

$$f(t) = \omega^2 \frac{dx^2}{dt^2} = -\omega^2 x$$

dif. denklemi integre edilir. Kısa olsun diye sol tarafı f ile göstereceğiz.

(2) denklemlerinde $f(t)=\omega^2 \dfrac{d^2x}{dt^2}$ koyalım, (3)

$$\omega\int^{a} \frac{d^2x}{d\,t^2}\,dt = {}^1f_{1/2} - \tfrac{1}{2} f_o - \frac{1}{12}\left(\frac{f^1_{-1/2}+f^1_{1/2}}{2}\right) + \frac{11}{720}\left(\frac{f^3_{-1/2}+f^3_{1/2}}{2}\right) + \ldots$$

$$\iint^{a} \frac{d^2x}{d\,t^2}\,dt^2 = {}^2f_o + \frac{1}{12} f_o - \frac{1}{240} f^2{}_o + \frac{31}{60480} f^4{}_o - \ldots$$

olur. $t = 0$ için $\int^0 \frac{d^2x}{dt^2}\,dt = \dot{x}_o$ ve $\int^0 \int \frac{d^2x}{dt^2}\,dt^2 = x_o$ değerlerini yerlerine koyarak

$$\omega\dot{x}_o = {}^1f^1{}_{/2} - \tfrac{1}{2} f_o - \frac{1}{12}\left(\frac{f^1_{-1/2}+f^1_{1/2}}{2}\right) + \frac{11}{720}\left(\frac{f^3_{-1/2}+f^3_{1/2}}{2}\right) + \ldots \quad (4)$$

$$x_o = {}^2f_o + \frac{1}{12} f_o - \frac{1}{240} f^2{}_o + \frac{31}{60480} f^4{}_o + \ldots \quad (5)$$

elde ederiz.

Şimdi integrasyonu başlatacağız. Bundan önceki örnekte serbest değişkenin her değeri için fonksiyon hesap edilebiliyordu. Burada ise bu yapılamaz. Sadece $t = 0$ için fonksiyon değeri olan $x_o = 1$ verilmektedir. Bunu ve ω nın değerini (3) te yerlerine koyalım.

$$f_o = -(0{,}1)^2 \,.\, 1 = -0{,}01$$

buluruz. Bunu farklar tablosunda yerine koyalım.

t	x	^2f	^1f	f	f^1	f^2	f^3
0	1			–0,01			
.							
.							
.							

Şimdi de $f^1_{-1/2}$ ve $^1f_{1/2}$ sıfır kabul ederek (4) ten

$$0{,}1 \,.\, 1 = {}^1f_{1/2} + \tfrac{1}{2}(-0{,}01) \text{ den } {}^1f_{1/2} = 0{,}095$$

$f^2{}_o$ 1 sıfır kabul ederek (5) ten

$$1 = {}^2f_o + \frac{1}{12}(-0{,}01) \text{ den } \quad {}^2f_o = 1{,}000833$$

elde ederiz.

$${}^2f_1 - {}^2f_o = {}^1f_{1/2} \text{ den de } {}^2f_1 = 1{,}095833$$

buluruz. Bunları tabloda yerlerine koyalım

t	x	${}^2f$	${}^1f$	f	f^1	f^2	f^3
0	1	1,000833		–0,01			
			0,095				
0,1		1,095833					
.							
.							
.							

Şimdi sıra t = 0,1 için x_1 in değerini bulmaya gelmiştir. Bunun için (5) teki indisleri birer çoğaltmak gerekir. Fakat tabloda f_1 değerinin henüz olmadığını gözönüne alarak biz (5) formülünü değilde Newton formülünden iki defa integral alarak elde edilen aşağıdaki formülü kullanacağız.

$$x_o = {}^2f_o + \frac{1}{12} f_{-1} + \frac{1}{12} f^1{}_{-3/2} + 0{,}0791667\, f^2{}_{-2}$$

$$+ \; 0{,}075\; f^3{}_{-5/2} \qquad (6)$$

Burada indisleri birer çoğaltalım:

$$x_1 = {}^2f_1 + \frac{1}{12} f_o + \frac{1}{12} f^1{}_{-1/2} + \; \cdots$$

Tablodaki değerleri yerlerine koyarak ve $f^1{}_{-1/2}$ yi de sıfır kabul ederek

$$x_1 = 1{,}095833 + \frac{1}{12}(-0{,}01)$$

$$= 1{,}095000$$

x_1 için bulduğumuz bu değer geçici bir değerdir. Bunu (3) de yerine koyarak $f_1 = -(0{,}1)^2.\ 1{,}095000$

$$= -\ 0{,}010950$$

elde ederiz. f_1 in ve bu x_1 in geçici değeri talboda yerine konur ve $f^1{}_{1/2}$ de hesap edilir.

t	x	${}^2f$	${}^1f$	f	f^1	f^2
0	1	1,000833		—0,01		
			0,095		—0,000950	
0,1	1,095	1,095833		—0,010950		
.						
.						
.						

Şimdi (6) formülünden daha hassas olan

$$x_o = {}^2f_o + \frac{1}{12} f_o - \frac{1}{240} f^2{}_{-1} \frac{1}{240} f^3{}_{-3/2} + \ \ldots \tag{7}$$

formülündeki indisleri birer çoğaltırız ve x_1 i tekrar hesap ederiz:

$$x_1 = {}^2f_1 + \frac{1}{12} f_1 - \ \ldots .$$

$$= 1{,}095833 + \frac{1}{12} (-\ 0{,}010950)$$

$$= 1{,}094921$$

x_1 in bu değeri daha iyi bir değerdir. Bunu (3) te yerine koyarsak $f_1 = -\ 0{,}010949$ buluruz. x_1 in ve f_1 in tablodaki eski değerlerini siler yerlerine yeni değerlerini koyarız ve $f^1{}_{1/2}$ yi de yeniden hesap ederiz.

Durum aşağıdaki gibi olacaktır:

t	x	^2f	^1f	f	f^1	f^2
0	1	1,000833		—0,01		
			0,095		—0,000949	
0,1	1,094921	1,095833		—0,010949		
.						
.						
.						

(7) formülünden x_1 i tekrar hesap edersek yine 1,094921 elde ederiz. O halde x_1 kesin şeklini almıştır.

Şimdi $t = 0{,}2$ için x_2 nin hesabına geçiyoruz. Önce

$^1f_{3/2} - {}^1f_{1/2} = f_1$ den $^1f_{3/2} = 0{,}084051$,

sonra $^2f_2 - {}^2f_1 = {}^1f_{3/2}$ den $^2f_2 = 1{,}179884$ elde ederiz.

(6) daki indisleri tekrar birer çoğaltarak

$$x_2 = {}^2f_2 + \frac{1}{12} f_1 + \frac{1}{12} f^1{}_{1/2} + \ \ldots$$

$$= 1{,}179884 + \frac{1}{12} (-0{,}010949) + \frac{1}{12} (-0{,}000949)$$

$$= 1{,}178893$$

Bunu kullanarak $f_2 = -\ \omega^2\ x_2 = -0{,}011789$ elde ederiz. Bunları tabloda yerlerine koyalım:

t	x	${}^2f$	${}^1f$	f	f^1	f^2	f^3
0,0	1,000000	1,000833		—0,010000			
			0,095000		—0,000949		
0,1	1,094921	1,095833		—0,010949		0,000109	
			0,084051		—0,000840		
0,2	1,178893	1,179884		—0,011789			

.

.

.

Şimdi(7) deki indisleri tekrar birer çoğaltıp x_2 yi yeniden hesap edeceğiz.

$$x_2 = {}^2f_2 + \frac{1}{12} f_2 - \frac{1}{240} f^2{}_o$$

$$= 1{,}179884 - \frac{1}{12} (-0{,}011789) - \frac{1}{240} \cdot 0$$

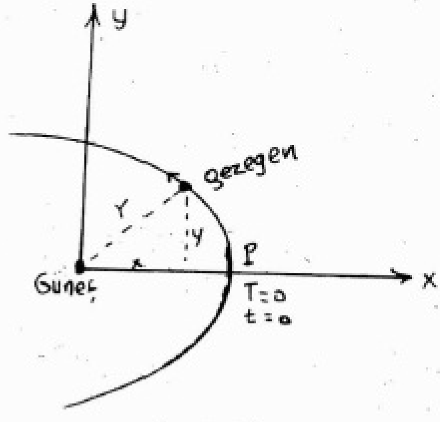
$$= 1{,}178901$$

x_2 nin bu değeri daha sahhatlidir. Bu değer tabloda 1,178893 ün yerine koyulur. Bu yeni x_2 değeri ile f_2 yi hesap edersek görürüzki $f_2 = -0{,}011789$ çıkmakta yani değişmemektedir. O halde x_2 de kesin şeklini almış demektir. Bundan sonra aynen yukarıda olduğu gibi devam edilir....

Not. Bu örnekte denklemin sadece yaklaşık çözümlerinin elde edildiğine dikkat ediriniz.

7.4 İki cisim probleminin sayısal integrasyonu.

Kütlesi Güneş kütlesine göre ihmal edilebilen bir küçük gezegenin yörüngesini nümerik integrasyonla elde edeceğiz. Gezegenin hareket denklemleri,



$$\frac{d^2x}{dt^2} = - k^2 \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - k^2 \frac{y}{r^3} \tag{1}$$

Burada $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $k = 0{,}01720209895$ tir. x,y,r astronomi birimi cinsinden, t ise efemeris günü cinsinden ölçülmektedirler.

İki-cisim probleminden yörüngenin elips olduğu bilinir. Bu elipsin yarı-büyük eksen uzunluğu $a = 2$ A. B. ve dış merkezliği $e = 0{,}2$ olsun.

Zaman başlangıcı olarak cismin perihelden geçiş anını alalım. O halde perihel noktasında $t = O$ dır. Aynı zamanda $T = O$ dır. P noktasında

$$x_o = r_o = a\,(1 - e) = 1{,}6 \text{ A. B. ve } y = O \tag{2}$$

dır. Bu noktadaki hızın bileşenlerini bulmak için,

$x = a\,(\cos E - e)$

$y = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E$ den t ye göre türev alırız.

$\dot{x} = -a \sin E\ \dot{E}$

$\dot{y} = a\sqrt{1-e^2}\,\cos E\ \dot{E}$

$\dot{E}$ yi $n(t-T) = E - e\sin E$ den türev alarak bulalım.

$$n = \dot{E} - e\cos E\,\dot{E},\quad \dot{E} = \frac{n}{1-e\cos E} = \frac{k a^{-3/2}}{1-e\cos E} \text{ dolayısıyla}$$

$$\dot{x} = -a \sin E \frac{k a^{-3/2}}{1-e\cos E}$$

$$\dot{y} = a\sqrt{1-e^2}\,\cos E \frac{k a^{-3/2}}{1-e\cos E}$$

perihel noktasında $E = O$ olduğundan

$$\dot{x}_o = O$$

$$\dot{y}_o = a\sqrt{1-e^2}\,\frac{k a^{-3/2}}{1-e} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,k\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 0{,}01489745 \tag{3}$$

Şimdi gayemiz belirli bir zaman aralığı seçmek ve buna tekabül eden x ve y değerlerini bulmaktır. Bu aralık öyle seçilmelidirki farklar tablosu gittikçe küçülsün. Yukarıki yörünge için $\omega = 10$ gün seçilebilir. Integre edeceğimiz denklemleri bundan evvelki örnekte olduğu gibi ω^2 ile çarparak

$$fx = \omega^2 \ddot{x} = - k^2 \omega^2 \frac{x}{r^3} \tag{4}$$

$$fy = \omega^2 \ddot{y} = - k^2 \omega^2 \frac{y}{r^3}$$

denklemlerini elde ederiz. Integrasyonu başlatabilmek için t = — 30, —20, —10, 0, 10, 20, 30 değerlerine tekabül eden x, y, fx ve fy değerleri hesap edilir. Bunun için

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\frac{k^2}{a^3}} = k \sqrt{\frac{1}{a^3}} = 0{,}01720209795 \sqrt{\frac{1}{2^3}}$$

radyan x $57^0{,}2957795 = 0^\circ{,}348464933$ /gün, T = 0, a = 2, e = 0,2 olduğundan

$$\begin{aligned} n(t-T) &= M \text{ den } M \\ M &= E - e\,\mathrm{Sin}E \text{ den } E \\ x &= a(\cos E - e) \text{ den } x \\ y &= a\sqrt{1-e^2}\ \mathrm{Sin}E \text{ den } y \\ r^2 &= (x^2 + y^2)^{1/2} \text{ den } r \\ fx &= - k^2 \omega^2\ x/r^3 \text{ den } fx \\ fy &= - k^2\omega^2\ y/r^3 \text{ den } fy \end{aligned} \tag{5}$$

hesap edilir. Bulunan değerler aşağıda verilmektedir.

t	x	fx	y	fy
— 30	1,54843	— 0,0109729	—0,44212	0,0031331
— 20	1,57697	— 0,0112949	—0,29652	0,0021238
— 10	1,59423	— 0,0114924	—0,14879	0,0010726
0	1,60000	— 0,0115591	0,00000	0,0000000
10	1,59423	— 0,0114924	0,14879	— 0,0010726
20	1,57697	— 0,0112949	0,29652	— 0,0021238
30	1,54843	— 0,0109729	0,44212	— 0,0031331

Bundan sonraki işlemleri yalnız birinci denklem için yâni x ler için ayrıntılı olarak göstereceğiz. y ler için de işlemler tamamiyle aynı şekilde ve aynı anda icra edilir.

Evvelâ fx in bulduğumuz yedi değerini tablo da yerlerine koyarız ve beşinci farklara kadar farklar tablosunu teşkil ederiz.

t	x	^2f	^1f	fx	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5
—30				—0,0109729					
					— 3220				
—20				—0,0112949		+ 1245			
					— 1975				
							+ 63		
—10				—0,0114924		+ 1308		—37	
					— 667		+ 26		—15
0	1,60000	^2f_o		—0,0115591		+ 1334		—52	
			$^1f_1/_2$		+ 667		—26		+ 15
10	1,59423			—0,0114924		+ 1308		—37	
					+ 1975		— 63		
20	1,57697			—0,0112949		+ 1245			
					+ 3220				
30	1,54843			—0,0109729					

Şimdi $^1f_1/_2$ ve ^2f_o ı hesap edeceğiz. Perihel noktasında x_o ve $\dot{x}_o$ verilmişti 149 inci sayfadaki (4) ve (5) formüllerini tekrar yazalım.

$$\omega \dot{x}_o = {}^1f_1/_2 - \frac{1}{2} f_o - \frac{1}{12} \left(\frac{f^1{}_{-1}/_2 + f^1{}_1/_2}{2}\right)$$

$$+ \frac{11}{720} \left(\frac{f^3{}_{-1}/_2 + f^3{}_1/_2}{2}\right) - \frac{191}{60480} \left(\frac{f^5{}_{-1}/_2 + f^5{}_1/_2}{2}\right)$$

$$x_o = {}^2f_o + \frac{1}{12} f_o - \frac{1}{240} f^2{}_o + \frac{31}{60480} f^4{}_o$$

(2), (3) ve yukarıki tablodan değerler yerlerine koyulursa

$^1f_1/_2 = -\ 0{,}0057796$

$^2f_o = 1{,}6009638$ elde edilir.

Şimdi bu değerler tablo da yerlerine koyulur ve sonra da $^1f_3/_2$, $^1f_5/_2$, $^1f_7/_2$ hesap edilir. Daha sonra da $^2f_1$, $^2f_2$, $^2f_3$ ve $^2f_4$ hesap edilir, ve tablo aşağıdaki şekli alır.

t	x	^2f	^1f	f	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5
—30				—0,0109729					
					—3220				
—20				—0,0112949		1245			
					—1975		63		
—10				—0,0114924		1308		—37	
					—667		26		—15
0	1,60000	1,6009638		—0,0115591		1334		—52	
			—0,0057796		667		—26		15
10	1,59423	1,5951842		—0,0114924		1308		—37	
			—0,0172720		1975		—63		
20	1,57697	1,5779122		—0,0112949		1245			
			—0,0285669		3220				
30	1,54843	1,5493453		—0,0109729					
			—0,0395398						
40		1,5098055							

Dikkat edilirse farkları yazarken kağıda sığsın diye soldaki sıfırları koymadık. Bütün bu f^1, f^2, f^3, f^4 ve f^5 farkları da yedi ondalıklıdırlar.

Şimdi sıra $t = 40$ için x_4 ün hesabına gelmiştir. Bunun için önce Newton interpolasyon formülünden iki defa integral alarak elde edilen

$$x_o = {}^2f_o + \frac{1}{12}\, f_{-1} + \frac{1}{12}\, f^1{}_{-3/2} + 0{,}0791667\, f^2{}_{-2} + 0{,}075\, f^3{}_{-5/2}$$

$+ 0{,}07135\, f^4{}_{-3} + 0{,}0682\, f^5{}_{-7/2}$ formülündeki indisleri dört çoğaltırız:

$$x_4 = {}^2f_4 + \frac{1}{12}\, f_3 + \frac{1}{12}\, f^1{}_{5/2} + 0{,}0791667\, f^2{}_2 + 0{,}075\, f^3{}_{3/2}$$

$$+ 0{,}071235\, f^4{}_1 + 0{,}06882\, {}^5{}_{1/2}$$

$$= 1{,}5098055 + \frac{1}{12}\,(-0{,}0109729) + \frac{1}{12}\,(0{,}0003220) + 0{,}0791667$$

$$(0{,}0001245) + 0{,}075\,(-0{,}0000063) + 0{,}07135\,(-0{,}0000037) +$$
$$0{,}0682\,(0{,}0000015) = 1{,}5089111$$

x_4 için bulduğumuz bu değer geçici bir değerdir. Bu esnada yukardaki işlemler y ler için de yapılmakta olduğundan y_4 için de bir geçici değer elde edilmiş durumda olacaktır. x_4 ve y_4 ün bu geçici değerleri (5) te yerlerine koyularak $fx_4 = -\,0{,}0105371$ değeri elde edilir, bu değer tabloda yerine konur ve sağa doğru farklar alınarak tablo genişletilir.

Tablonun şimdiki durumu aşağıdaki gibi olacaktır:

t	x	²f	¹f	fx	f¹	f²	f³	f⁴	f⁵
—30				—0,0109729					
					—3220				
—20				—0,0112949		1245			
					—1975		63		
—10				—0,0114924		1308		—37	
					—667		26		—15
0	1,60000	1,6009638		—0,0115591		1334		—52	
			—0,0057796		667		—26		15
10	1,59423	1,5951842		—0,0114924		1308		—37	
			—0,0172720		1975		—63		—7
20	1,57697	1,5779122		—0,0112949		1245		—44	
			—0,0285669		3220		—107		
30	1,54843	1,5493453		—0,0109729		1138			
			—0,0395389		4358				
40	1,50891	1,5098055		—0,0105371					

Şimdi x_4 ün yukarıdaki geçici değeri daha hassas olan aşağıdaki formülle test edilecektir:

$$x_o = {}^2f_o + \frac{1}{12}\, f_o - \frac{1}{240}\, f^2{}_{-1} - \frac{1}{240}\, f^3{}_{-3/2} - 0{,}00365\ f^4{}_{-2}$$

$$- 0{,}0031\ f^5{}_{-5/2}$$

indisleri dört çoğaltarak,

$$x_4 = {}^2f_4 + \frac{1}{12}\, f_4 - \frac{1}{240}\, f^2{}_3 - \frac{1}{240}\, f^3{}_{5/2} - 0{,}00365\ f^4{}_2$$

$$- 0{,}0031\ f^5{}_{3/2}$$

$$= 1{,}5098055 + \frac{1}{12}\,(-0{,}0105371) - \frac{1}{240}\,(0{,}0001138) - \frac{1}{240}$$

$$(-0{,}0000107) - 0{,}00365\ (-0{,}0000044) - 0{,}0051\ (-0{,}0000007)$$

$$= 1{,}50892$$

x_4 ün bu değeri yukarıda bulduğumuz geçici değerinden beşinci hanede bir birim fark etmekte olduğundan kesin değer olarak alınabilir. Eğer fark daha büyük olsaydı bu değeri kullanarak yeniden fx_4 hesap edilecek ve sonra da daha hassas x_4 değeri aranacaktı.

Bundan sonra sıra $t = 50$ için x_5 in değerini bulmaya geliyor. Bunun için x_4 ü bulurken yapılan işlemler aynen tekrar edilecektir. Her defasında indisler bir çoğaltılacak ve böylece integrasyon istenildiği kadar yürütülecektir.

x ler için bu hesaplar yapılırken aynı hesapların aynı anda y ler için de yürütülmesi gerekir. Zira f_x ve f_y lerin hesabında hem x ve hem de y değerlerine ihtiyaç vardır. Yukarıda x ler için kullandığımız formüller x yerine y yazarak y lerin hesabında kullanılmaktadır. Tekrar ayrıntıya girmeden y ler için elde edilen sonuçları aşağıda veriyoruz:

t	y	²f	¹f	fy	f¹	f²	f³	f⁴	f⁵
—30				0,0031331					
					—10093				
—20				0,0021238		—419			
					—10512		205		
—10				0,0010726		—214		9	
					—10726		214		—9
0	0,00000	0,0000000		0,0000000		0		0	
			0,1488848		—10726		214		—9
10	0,14879	0,1488848		—0,0010726		214		—9	
			0,1478122		—10512		205		—15
20	0,29652	0,2966970		—0,0021238		419		—24	
			0,1456884		—10093		181		
30	0,44212	0,4423854		—0,0031331		600			
			0,1425553		—9493				
40	0,58460	0,5849407		—0,0040824					
.									
.									
.									

Böylece elde ettiğimiz x ve ye değerleri (1) diferansiyel denklemlerinin çözümleridir. Diğer bir deyişle hareket eden küçük gezegenin koordinatlarıdır.

7.5 Üç cisim probleminin sayısal integrasyonu.

Bundan önceki kısımda kütlesi Güneşinki yanında ihmal edilebilen bir cismin Güneş etrafındaki eliptik yörüngesini biliyor kabul etmiş ve cismin perihelden başlıyarak bu yörünge üzerindeki hareketini, yâni herhangibir andaki koordinatlarını, nümerik integrasyonla elde etmiştik. Orada küçük cismi eliptik hareketinden saptıran bir başka bozucu cisim (üçüncü cisim) mevcut değildi.

Bu kısımda ise, küçük cismin Güneş etrafındaki eliptik hareketinin bir üçüncü cisim tarafından bozulduğunu kabul edecek ve bu şart altında küçük cismin koordinatlarını bulmaya çalışacağız. Bu gaye için en çok kullanılan iki meşhur metod vardır: Cowell ve Encke metodu. Biz burada Cowell nümerik integrasyon metodunun bir uygulamasını vereceğiz. Bunun için genelliği bozmayacak fakat hesapları kolaylaştıracak basit bir örnek seçiyoruz.

Farzedelimki Yer ile Mars opozisyon haline gelmeden 100 gün önce Yer'den fırlatılan bir roket 285 gün sonra Mars'a varmıştır. Yer ve Mars'ın yörüngelerini aynı düzlemde kabul edelim ve birincinin yarıçapı 1 A.B. ve ikincinin yarıçapı 1,523679 A.B. olmak üzere her iki yörüngeyi dairesel alalım. Keza Yer ve Marsın bu roket üzerine hiç etki etmediklerini varsayalım. Bu durumda roketimiz Güneş etrafında bir elips çizecektir. Gauss yöründe tayini metodunu uyguluyarak bu yörünge için bulduğumuz elemanlardan bize lâzım olacakları aşağıda veriyoruz:

$$
\begin{aligned}
a &= 1{,}2638542315 \text{ A. B.} \\
e &= 0{,}2096211443 \\
T &= 5{,}8887884639 \text{ gün (atılış anından itibaren)} \\
n &= 0{,}0121069838 \text{ rad/gün} \\
\dot{x}_0 &= 0{,}0017404041 \text{ A.B./gün} \\
\dot{y}_0 &= 0{,}0188324564 \text{ A.B/gün}
\end{aligned}
$$

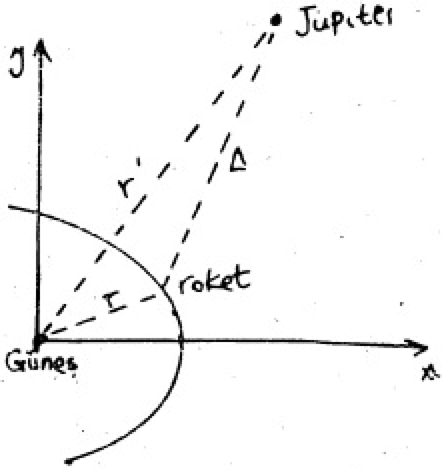
Şimdi Jüpiter'in bu yörünge üzerinde yapacağı etkilerden dolayı roketin herhangibir andaki koordinatları yukardaki eliptik elemanlar vasıtasıyla bulacağımız koordinatlardan farklı olacaktır. Dolayısıyla Cowell metodunu kullanarak bu bozulmuş koordinatları bulmaya çalışalım.

Sayfa 131'e göre roketin Jupiter etkisi altında Güneş etrafındaki hareketinin denklemleri

$$\ddot{x} = - G \frac{m_o + m}{r^3} x + Gm' \left(\frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3} \right)$$

$$\ddot{y} = - G \frac{m_o + m}{r^3} y + Gm' \left(\frac{y' - y}{\Delta^3} - \frac{y'}{r'^3} \right) \quad (1)$$

dir. Burada x,y roketin, x',y' Jüpiterin Güneş merkezli koordinatları $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, $\Delta = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ dir ve düzlemsel hareket kabul ettiğimizden z koordinatı mevcut değildir.



Güneş kütlesini birim kabul edeceğiz. O zaman Jüpiterin kütlesi 10^{-3} olur. Roketin kütlesi ise ihmal edilmektedir. $m_o = 1$, $m = 0$, ve $m' = 10^{-3}$ koyarak ve bundan önceki örneklerde olduğu gibi integre edeceğimiz denklemleri ω^2 ile çarparak,

$$f_x = 10^{-3} \omega^2 k^2 \left(\frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) - \frac{\omega^2 k^2}{r^3} x$$

$$f_y = 10^{-3} \omega^2 k^2 \left(\frac{y' - y}{\Delta^3} - \frac{y'}{r'^3} \right) - \frac{\omega^2 k^2}{r^3} y \quad (2)$$

denklemlerini elde deriz. Buradaki $k^2 = G$ dir.

İntegrasyonu roketin atılış anından itibaren başlatalım. Bu anda $t = 0$ dır. İntegrasyon aralığı olarak $\omega = 5$ gün seçiyoruz. Bu aralık değeri deneme ile tespit edilmiştir. İntegrasyonu başlatabilmek için başlangıç ($t = 0$) anından önce ve sonra üç an için roketin koordinatlarının bilinmesi gerekir. Bu koordinatları

$M = n\,(t—T)$ den M yi

$M = E — e\sin E$ den E yi

$x = a\,(\cos E\text{-}e)$ den x i

$y = a\,\sqrt{1—e^2}\,\sin E$ den y yi hesap ederek elde ederiz. Bulunan değerler aşağıdadır:

TABLO 1

Roketin Koordinatları

t	x	y
—15	0,935339132	—0,3870342006
—10	0,961867269	—0,2970506011
— 5	0,981426834	—0,2049166037
0	0,993788976	—0,1112810373
5	0,998806535	—0,0168236826
10	0,996419212	0,0777582800
15	0,986655738	0,1717650847

Şimdi de Jüpiterin Güneş merkezli koordinatlarına ihtiyacımız vardır. Bu koordinatların yukarıda olduğu gibi yalnız yedi an için değil fakat bütün integrasyon boyunca bilinmesi icab eder. Bereket versinki bütün gezegenlerin koordinatları almanaklarda verilmektedir. Gerekli tarihler için bu koordinatlar bu almanaklardan temin edilir. Aşağıdaki tabloda bu değerlerin bize hazır olarak verildiğini kabul ediyoruz:

TABLO 2

Jüpiterin koordinatları

t	x′	y′
—15	—5,1565760403	0,6912385393
—10	—5,1614505363	0,6538467009
— 5	—5,1660538970	0,6164205154
0	—5,1703858804	0,5789619488
5	—5,1744462593	0,5414729689
10	—5,1782348201	0,5039554491
15	—5,1817513642	0,4664116477
20	—5,1849957068	0,4288432495
.	.	.
.	.	.
.	.	
280	—4,9789114631	—1,5094794460
285	—4,9678403279	—1,5455258096

Son olarak yine ilk yedi an için roket üzerinde meydana gelen toplam çekimi hesap edeceğiz. Bunun için Tablo 1 ve 2 deki koordinatları (2) denklemlerinde yerlerine koyarız. Bulunan değerler aşağıdadır:

TABLO 3

Roket Üzerindeki Çekim

t	fx	fy
—15	—0,0066711454	0,0027604855
—10	—0,0069746730	0,0021539876
— 5	—0,0072041719	0,0015042020
0	—0,0073517767	0,0008232264
5	—0,0074122601	0,0001248407
10	—0,0073834419	—0,0005762063
15	—0,0072663637	—0,0012650168

Şimdi (2) denklemlerinin sayısal çözümüne geçebiliriz. Her iki denklemi ayrı ayrı integre edeceğiz. Önce birinciden başlıyalım:

1. fx_{-3}, fx_{-2}, fx_{-1}, fx_o, fx_1, fx_2, fx_3 ve x_o değerlerini farklar tablosuna yerleştiriniz,

2. $f^1{}_{-5/2}$, $f^1{}_{-3/2}$, $f^1{}_{-1/2}$, $f^1{}_{1/2}$, $f^1{}_{3/2}$, $f^1{}_{5/2}$, $f^2{}_{-2}$, $f^2{}_{-1}$, $f^2{}_o$, $f^2{}_1$, $f^2{}_2$, $f^3{}_{-3/2}$, $f^3{}_{-1/2}$, $f^3{}_{1/2}$, $f^3{}_{3/2}$, $f^4{}_{-1}$, $f^4{}_o$, $f^4{}_1$, $f^5{}_{-1/2}$, $f^5{}_{1/2}$, $f^6{}_o$ farklarını bulunuz.,

3. $${}^2f_o = x_o - \frac{1}{12}\, fx_o + \frac{1}{240}\, f^2{}_o - \frac{31}{60480}\, f^4{}_o$$

$${}^1f_{1/2} = \omega\, \dot{x}_o + \frac{1}{2}\, fx_o + \frac{1}{12}\left(\frac{f^1{}_{-1/2} + f^1{}_{1/2}}{2}\right)$$

$$- \frac{11}{720}\left(\frac{f^3{}_{-1/2} + f^3{}_{1/2}}{2}\right) + \frac{191}{60480}\left(\frac{f^5{}_{-1/2} + f^5{}_{1/2}}{2}\right)$$

den ${}^2f_o$ ve ${}^1f_{1/2}$ değerlerini bulup tabloya yerleştiriniz.

4. ${}^2f_1$, ${}^2f_2$, ${}^2f_3$, ${}^2f_4$, ${}^1f_{3/2}$, ${}^1f_{5/2}$, ${}^1f_{7/2}$ farklarını hesap ediniz.

5. $$x_1 = {}^2f_1 + \frac{1}{12}\, fx_o + \frac{1}{12}\, f^1{}_{-1/2} + 0{,}0791667\, f^2{}_{-1} + 0{,}075 f^3{}_{-3/2}$$

$$x_2 = {}^2f_2 + \frac{1}{12}\, fx_1 + \frac{1}{12}\, f^1{}_{1/2} + 0{,}0791667\, f^2{}_o + 0{,}075\, f^3{}_{-1/2}$$

$$+ 0{,}07135\, f^4{}_{-1}$$

$$x_3 = {}^2f_3 + \frac{1}{12}\, fx_2 + \frac{1}{12}\, f^1{}_{3/2} + 0{,}0791667\, f^2{}_1 + 0{,}075\, f^3{}_{1/2}$$

$+ 0{,}07135\ f^4{}_0 + 0{,}0682\ f^5{}_{-1/2}$ den x_1, x_2 ve x_3 değerlerini hesap ediniz.

6. Bu x_1, x_2, x_3 değerleri ile birlikte, bunlara tekabül eden Jüpiterin x'_1, x'_2, x'_3 koordinatlarını (Tablo 2 de) kullanarak

$$fx = 10^{-3}\ \omega^2\ k^2 \left(\frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x}{r'^3}\right) - \frac{\omega^2 k^2}{r^3}\ x \text{ ten yeni}$$

fx_1, fx_2 ve fx_3

değerlerini bulunuz. Bu yeni değerleri farklar tablosunda eskilerinin yerine koyunuz ve 2. 3. 4. ve 5. adımlarını yeniden tekrarlayınız. Böylece yeni x_1, x_2 ve x_3 değerleri elde edeceksiniz. Eğer bu yeni değerler eski değerlere çok yakın değil ise iterasyona devam ediniz. Aksi halde 7. inci adıma geçiniz.

7. 5 inci adımın son denkleminden indisleri bir çoğaltarak

$$x_4 = {}^2f_4 + \frac{1}{12}\ fx_3 + \frac{1}{12}\ f^1{}_{5/2} + 0{,}0791667\ f^2{}_2 + 0{,}075$$

$$f^3{}_{3/2} + 0{,}07135\ f^4{}_1 + 0{,}0682\ f^5{}_{1/2} + 0{,}065\ f^6{}_0$$

denklemini ve buradan da x_4 değerini hesap ediniz.

8. Bu x_4 değerine karşılık gelen x'_4 değeri (Tablo 2) ile birlikte 6. da da olduğu gibi fx_4 değerini hesap ediniz, farklar tablosundaki yerine koyunuz, farklara aşağı doğru genişletiniz ve 7. deki indisleri birer artırarak x_5 değerini hesap ediniz.

9. Ve böylece integrasyona istediğiniz kadar devam ediniz.

10. x yerine y koyarak 1. den 9. a kadar olan işlemleri ikinci denklemin integrasyonu için uygulayınız.

Not. Sonuçlar sayfa 163 ve 164 de verilmektedir. Bu tablolarda kağıda sığması için farkların soldaki sıfırları yazılmamıştır. Bütün değerlerin on ondalıklı olduğuna dikkat ediniz.

t	x	${}^2f$	${}^1f$	fx	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5	f^6
—15				0,0066711454—						
					3035276—					
—10				0,0069746730—		740286				
					2294989—		78655			
—5				0,0072041719—		818942		26385—		
					1476047—		52270		4081—	
0	0,9937889760	0,9944019886		0,0073517767—		871212		30466—		2325
			0,0050174078		604834—		21804		1755—	
5	0,9988015212	0,9994193964		0,0074122601—		893017		32221—		77—
			0,0023948523—		288182		10417—		1832—	
10	0,9964089163	0,9970245441		0,0073834419—		882599		34053—		155609
			0,0097782942—		1170782		44471—		13729	
15	0,9866403525	0,9872462498		0,0072663637—		838128		20324—		23375—
			0,0170446579—		2008907		64795—		9646—	
20	0,9696124985	0,9702015918		0,0070654729—		773332		29971—		25431
			0,0241101308—		2782240		94766—		15784	
25	0,9455254564	0,9460914592		0,0067872488—		678566		14186—		
.										
.										
.										

t	y	²f	¹f	fy	f¹	f²	f³	f⁴	f⁵	f²
—15				0,0027604855						
					6064985—					
—10				0,0021539876		432865—				
					6497850—		120955			
—5				0,0015042020		311910—		9686		
					6809760—		137817		7200—	
0	0,1112810373—	0,1113497125—		0,0008232264		174093—		9662		968—
			0,0945161992		6983853—		147479		8168—	
5	0,0168232212—	0,0168335132—		0,0001248407		26614—		1494		1561—
			0,0946410399		7010467—		148973		9729—	
10	0,0777595070	0,0778075267		0,0005762063—		122359		8235—		6930
			0,0940648339		6888108—		140734		2799—	
15	0,1717668380	0,1718723606		0,0012650168—		263093		11035—		
			0,0927998171		6624906—		129699			
20	0,2645113935	0,2646721778		0,0019275074—		392793				
			0,0908722920		6232113—					
25	0,3553316390	0,3555444690		0,0025507188—						
			0,0883215737							
30	0,4436055780	0,4438660432								
.										
.										
.										