5.8. Gezegenin ve uydularının yoğunluklarını aynı kabul ederek Mars'ın Roche limitlerini hesaplayınız ve sonuçlarınızı Deimos ile Phobos uydularının yörüngeleriyle karşılaştırınız.

C: Roche limitini veren formül; $d = 2{,}44 \sqrt{\frac{\rho_{Ara\ gezegen}}{\rho_{uydu}}} \cdot R_{gezegen}$

$$R_{mars} = 3394\ km$$
$$M_{mars} = 6{,}4 \times 10^{23}\ kg$$
$$M_{deimos} = 1{,}8 \times 10^{15}\ kg$$
$$M_{phobos} = 1{,}07 \times 10^{16}\ kg$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Phobos ve Deimos'un küresel yapıda olmadığı için hacimleri:

$$V_{phobos} = 27000 \times 21000 \times 19000 = 1{,}07 \times 10^{13}\ m^3$$
$$V_{deimos} = 15000 \times 12000 \times 11000 = 1{,}98 \times 10^{12}\ m^3$$
$$V_{mars} = \frac{4}{3}\pi (3394000)^3 = 1{,}63 \times 10^{20}\ m^3$$

$$\rho_{phobos} = \frac{1{,}07 \times 10^{16}\ kg}{1{,}07 \times 10^{13}\ m^3} = 1000\ kg/m^3$$

$$\rho_{deimos} = \frac{1{,}8 \times 10^{15}\ kg}{1{,}98 \times 10^{12}\ m^3} = 909{,}09\ kg/m^3$$

$$<\rho> = \frac{\rho_{pho} + \rho_{dei}}{2} = 955\ kg/m^3$$

$$\rho_{mars} = \frac{6{,}4 \times 10^{23}\ kg}{1{,}63 \times 10^{20}} = 3926{,}3\ kg/m^3$$

$$d_{roche} = 2{,}44 \sqrt[3]{\frac{3926{,}3}{955}} \cdot 3394\ km = 13266{,}6\ km$$
$$a_{phobos}(9377\ km) < d_{roche} < a_{deimos}\ (21000\ km)$$

Phobos Roche limitinin içinde olduğu halde parçalanmamıştır. Bunun nedeni Phobos uydusunun boyutlarının küçük olması nedeniyle, uyduyu oluşturan maddenin gerilme kuvvetlerinin, ana gezegenin (Mars'ın) çekim kuvvetinden (*tidal/gelgit etkilerinden*) daha büyük olmasıdır. Benzer olarak Roche sınırının dışında dolanan Deimos uydusu da, bu sınırın içine girse, aynı nedenden dolayı parçalanmayacaktır.

5.12. Hidrostatik denge denklemini kullanarak Merkür, Venüs ve Mars'ın merkezi basınçlarını karşılaştırınız.

C:

$M_{merkür} = 3{,}29 \times 10^{23}\ kg$

$R_{merkür} = 2440\ km$

$M_{venus} = 4{,}86 \times 10^{24}\ kg$

$R_{venus} = 6052\ km$

$M_{mars} = 6{,}4 \times 10^{23}\ kg$

$R_{mars} = 3394\ km$

$$\rho_{Merkür} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3{,}29 \times 10^{23}\ kg}{\frac{4}{3}\pi (2440000)^3} = 5406\ kg/m^3$$

$$\rho_{Venüs} = \frac{4{,}86 \times 10^{24}}{\frac{4}{3}\pi (6052000)^3} = 5234\ kg/m^3$$

$$\rho_{Mars} = \frac{6{,}4 \times 10^{23}}{\frac{4}{3}\pi (3394000)^3} = 3908\ kg/m^3$$

$P_c = \frac{2}{3}\pi G < \rho >^2\ R^2$ formülünden:

$$P_{c_{Merkür}} = \frac{2}{3}\pi\ \ 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot (5406)^2 \cdot (2440000)^2 = 2{,}418 \times 10^{10}\ Pa$$

$$P_{c_{Venüs}} = \frac{2}{3}\pi\ \ 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot (5234)^2 \cdot (6052000)^2 = 1{,}394 \times 10^{11}\ Pa$$

$$P_{c_{Mars}} = \frac{2}{3}\pi\ \ 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot (3908)^2 \cdot (3394000)^2 = 2{,}445 \times 10^{10}\ Pa$$

$$P_{c_{Venüs}} > P_{c_{Mars}} > P_{c_{Merkür}}$$

5.13. Mars'ın ortalama albedosu *A*= 0,16'dır. Enberi noktasında öğlen vakti yüzey sıcaklığı ne kadardır? Enöte noktasında ne kadardır? Gözlemsel olarak elde edilmiş olan 210-300 K sıcaklıkları ile karşılaştırınız.

C:

Mars'ın yörünge yarı büyük eksen uzunluğu (a) ve yörünge dış merkezliği/basıklığı (e) şöyledir:

$a_{mars} = 1{,}5237\ AB,\ \ e_{mars} = 0{,}0934$

Yörünge enberi ve enöte uzaklıkları ise şöyle hesaplanabilir:

$a_{enberi} = a - a.e = 1{,}5237 - 1{,}5237 \cdot 0{,}0934 = 1{,}3813\ AB$
$a_{enöte} = a + a.e = 1{,}5237 + 1{,}5237 \cdot 0{,}0934 = 1{,}666\ AB$

Gezegenin yüzey albedosu $A_{mars} = 0{,}16$.

Kullanılacak formül:

$T = 394(1-A)^{1/4}.\dfrac{1}{\sqrt{r_p}}$, burada r_p, *AB* cinsinden Güneş-gezegen uzaklığıdır.

$$T_{enb} 3{,}94.(1-0{,}16)^{1/4}.\frac{1}{\sqrt{1{,}3813}} = 320{,}8^{O}\,K$$

$$T_{enöte} 3{,}94.(1-0{,}16)^{1/4}.\frac{1}{\sqrt{1{,}666}} = 292{,}12^{O}\,K$$

Mars gezegeninin gözlemlerden belirlenen yüzey sıcaklığı ise, $T_{gözlenen} : 210 - 300^{o}\,K$ arasında kalmaktadır. Yani gözlenen yüzey sıcaklığı, $300^{o}\mathrm{K}$ (en yüksek) değeri ile $210^{o}\mathrm{K}$ (en düşük) değeri arasında değişmektedir. Teorik yolla bulunan yukarıdaki değerler ise $292^{o}\mathrm{K}$ ile $320^{o}\mathrm{K}$ arasında kalmaktadır. Gözlemsel değer $(210^{o}\mathrm{K})$, teorik beklenen sıcaklıktan $\sim 80^{o}\mathrm{K}$ daha düşüktür. Bu sonuç Mars atmosferinin ısıyı iyi tutamayacak bir yapıda olduğunun göstergesidir.

5.14. 19.yy'ın sonlarında Percival Lowell Mars yüzeyinde büyük kanala benzer yapılar gördüğünü ileri sürmüştür. Fakat bu dönemdeki diğer astronomlar bahsedilen kanalları görememişlerdir. Yer'de bulunan teleskopların ayırma güçleri dikkate alındığında Mars yüzeyinde görülebilecek yapıların büyüklükleri ne olabilir? İyi bir teleskop için açısal ayırma gücü teleskobun optik sistemi, tarafından değil atmosferik görüş tarafından sınırlandırılır. Mükemmel bir görüşe sahip bir gözlem gecesi için bu ayırma gücü 1 yay saniyesi kadardır. En iyi gözlemevlerinde mükemmel atmosferik görüşün olması durumunda en fazla ~0.3 yay saniyesi kadar bir açısal ayrıklığın ölçülmesi mümkündür.

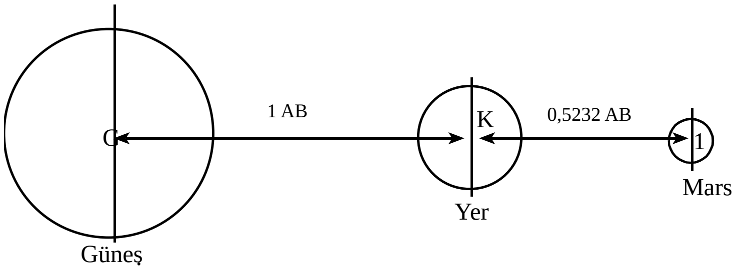
(a) Karşılaşma konumunda Mars'ın açısal çapı ne kadardır?

(b) Mars'taki en büyük yüzey oluşumlarından birisi "Valles Marineris"tir. Boyutları 5000x500 km'dir. Karşılaşma konumunda "Valles Marineris" (V.M.)'in açısal boyutuları ne kadardır? Bu yapı Yer'den gözlenebilir mi?

(c) Karşılaşma konumunda, 1 km enindeki bir kanalı görebilmek için kabaca ne kadarlık bir açısal ayırma gücüne gereksinim duyulur? Lowell bu boyuttaki kanalları görebilir miydi?

(d) Bir yay saniyelik bir açısal ayırma gücü ile minimum görülebilecek yüzey yapısının boyutu ne kadar olabilir?

C: **a)** Karşılaşma konumu:



Açısal çap: $\delta = 2.\arctan\left(\frac{1}{2}.d / D\right)$ formülüyle verilebilir. Burada;

$\delta =$ Açısal çap　　　　　　　　　　$d_{Mars} = 6788$ km

d= cismin çapı　　　　　　　　　　$D_{Yer\ Mars} \cong 78555000$ km

D= Cisimler arası uzaklık

$$\delta_{Mars} = 2.\arctan\left(\frac{1}{2}\frac{6788}{78555000}\right)$$
$$= 17'',82 \approx 18'' = 0'.3$$

b) $\delta_{V.M} = 2.\arctan\left(\frac{1}{2}.\frac{5000}{78555000}\right) = 13''.13$ Evet Yer'den gözlenebilir.

c)

$$\delta_{Kanal} = 2.\arctan\left(\frac{1}{2}\frac{1}{78555000}\right)$$
$$= 0'',00025$$

O halde 1 km genişliğindeki bir kanalın Yer'den görülmesi (atmosferik etki nedeniyle) mümkün değildir.

d) $1'' = 2.\arctan\left(\frac{1}{2}.\frac{d}{78555000}\right)$

d = 380,84 km boyutlarında bir yüzey yapısı ancak $1''$ ayırma gücü ile görülebilir.

GÖK MEKANİĞİ – EK – PROBLEMLERİ

1. İki boyutlu bir kuvvet alanı için potansiyel enerji fonksiyonu $U = \left(3x^3 y - 7x\right)...Joule$ biçimindedir. Herhangi bir (x, y) noktasına etkiyen kuvveti bulunuz.

C:

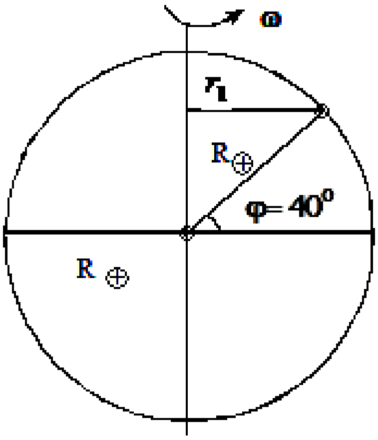
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^3 y - 7x\right) = \left(7 - 9x^2 y\right)\ Newton$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^3 y - 7x\right) = -3x^3\ \ Newton$$

$$\vec{F} = \left(7 - 9x^2 y\right)\hat{i} - 3x^3\,\hat{j}\ \ Newton$$

---

2. Yeryüzünde $\varphi = 40^{o}$ enlemindeki bir nokta için, Yer'in dönmesinden ileri gelen v_θ teğetsel hızını hesaplayınız. Bu hız ekvator ve kutuplarda hangi değeri alır?



C:

$v_\theta = r.\dot{\theta},$ 'dir. Burada;

$R_\oplus = 6375\ km\ ve\ r_1 = R_\oplus.Cos\varphi$

olmak üzere;

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{86400s} = 7{,}3\times10^{-5}\ rd/s$$

Yer'in dönmesinden ileri gelen açısal hızdır.

Yukarıda yerine yazarsak:

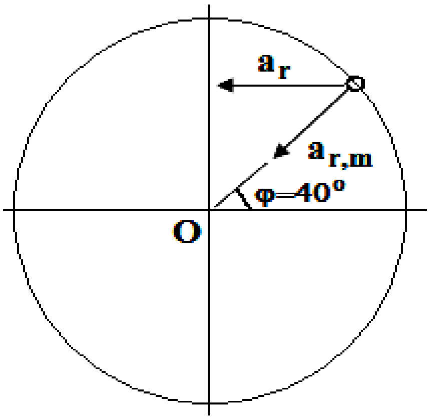
$$v_\theta = r.\dot{\theta} = r_1.\omega = R_\oplus.Cos\varphi.\omega$$

$$v_\theta = 63\,750\times10^3.Cos\left(40^o\right).7{,}3\times10^{-5}\,rd.s^{-1} = 360\ m/s = 0{,}36\ km/s$$

Bu hız; ekvatorda $v_\theta\,|_{ekv} = R_\oplus.\omega = 470\ m/s = 0{,}47\ km/s$

kutuplarda $v_\theta\,|_{kutup} = R_\oplus.Cos\left(90^o\right)\omega = 0\ m/s$ değerini alır.

b) Aynı nokta $(\varphi = 40^o)$ için merkezcil ivmeyi ve bunun Yer merkezi doğrultusundaki bileşenini hesaplayınız.



$$a_r = \frac{-v^2}{r} = \frac{-(0{,}36\ km/s)^2}{6375\ km.Cos(40^o)} = -0{,}026\ m/s^2$$

Bu ivmenin merkez (O) yönündeki bileşeni

$a_{r,m} = -a_r.Cos\varphi = -0{,}016\ m/s^2$ olur. Bu ivmeyi Yer'in kütle çekim ivmesiyle $(g = 9{,}81\ m/s^2)$ karşılaştırırsak, çok küçük olduğunu görürüz.

---

3. 10 kg kütleye sahip bir yapay uydu, bir uzay aracıyla $2R_\oplus$ uzaklığında ($R_\oplus = 6375\ km,$ Yer'in ortalama yarıçapıdır), yarıçap vektörüne dik doğrultuda hangi hızla fırlatılmalı ki yörünge parabol olsun.

C: Parabolik yörünge için en düşük hız, cisimden kaçış ($v_{kaçış}$) hızına eşittir. O halde

$$v_{kacis} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2G.M_\oplus}{2.R_\oplus}} = \sqrt{\frac{2\times 6{,}67\times 10^{-11}\times 6\times 10^{24}}{2\times 6375\times 10^3}}$$

$v_{kacis} = 7823\ m/s = 7{,}82\ km/s$ hızla fırlatılırsa yörüngesi parabol olur.

---

4. Yer'de *200 cm* yükseğe atlayan bir atlet, Ay'da ne kadar yükseğe atlayabilir?

C: Çözüm için Yer ve Ay'ın kütle çekim ivmelerini oranlayalım:

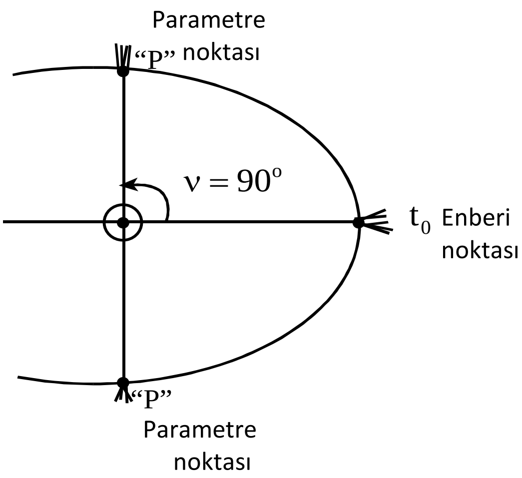
$$\frac{g_{yer}}{g_{ay}} = \frac{\dfrac{GM_{yer}}{R_{yer}^2}}{\dfrac{G.M_{ay}}{R_{ay}^2}} = \frac{R_{ay}^2}{R_{yer}^2}.\frac{M_{yer}}{M_{ay}} = \left(\frac{1738}{6375}\right)^2.\frac{6\times 10^{24}}{7{,}4\times 10^{22}} \cong 6\ kat$$

Ay'da zıplayabileceği yükseklik $h_{Ay} = 6\times 200\ cm = 1200\ cm = 12\ m$!!

---

5. Bir kuyruklu yıldızın (ky) kuyruğunun belirmeye başlaması için, yörüngesi üzerinde yaklaşık olarak "parametre ucu" denilen yerde olması gerekir. Böyle bir ky, Güneş çevresinde *60 yıl*lık bir dönem (periyot) ile yarıbüyük eksen uzunluğu *a= 6,25 AB*, dış merkezliği (basıklığı) *e= 0,3* olan bir elips yörüngede dolanmaktadır. Bu ky'ın ne kadar süre kuyruğunun görülebileceğini, ilgili bir şekil de çizerek, hesaplayınız.

C:



Parametre noktası (ucu), gökcisminin enberi noktasından geçtikten sonra gerçek anomali açısının (ν) tam 90^o'ye ulaştığı yerdir.

Ky'a ait veriler:

A= 6,25 AB

P= 60 yıl

e= 0,3

Çözümde eksantrik anomali E değerine ihtiyacımız vardır. Hesabı ν cinsinden şöyle yapılır:

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.\tan\frac{\nu}{2}$$

Parametre ucunda $\nu = 90^o$ olacağından $\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-0,3}{1+0,3}}.\tan\frac{90}{2}$'den

$\frac{E}{2} \equiv 36^o,27 \Rightarrow E = 72^o,54 = 1,266\ rd$ bulunur.

Kepler Denklemi olan, $\frac{2\pi}{P}(t-t_0) = M = E - eSinE$ denklemini kullanarak parametre ucu ile enberi noktasından geçiş zamanı arasındaki süre olan $(t-t_0)$ farkı hesaplanabilir.

$$\frac{2\pi}{60\ yil}(t-t_0) = 1,266\ rd - 0,3.Sin(72^o,54) \Rightarrow (t-t_o) = 9,36\ \ yıl$$

Bu süreyi 2 ile çarparsak, ky'ın kuyruğunun görüleceği süreyi bulmuş oluruz:

$2(t-t_0) = 18,715\ \ yıl.$

---

6. 2 km yarıçapa sahip bir küçük gezegenin yoğunluğu $\rho = 3\ g/cm^3$ olduğuna göre, (a) bu küçük gezegenin yüzeyinden kurtulma (kaçış, $\nu_{kaçış}$) hızı ne olur? (b) Yeryüzünde kütlesi birim olan cisme bu hız verilirse, cisim ne kadar yükselebilir?

C: a) $\nu_{kaçış} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, Burada; $M = \rho.\frac{4}{3}\pi R^3 = (3000\ kg/m^3).\frac{4}{3}\pi(2\times10^3 m)^3$

$$M = 1\times 10^{14}\, kg; \Rightarrow$$

$$v_{kaçiş} = \sqrt{\frac{2\times G\times 10^{14}}{2\times 10^{3}}} = 2{,}6\ m/s$$

b) Bu hızı yeryüzünde bir cisme verirsek:

$h = \dfrac{v_0^2}{2g} = \dfrac{(2{,}6)^2}{2\times 9{,}81} = 32\ cm$ cm yükselebilecektir!
