$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \Theta}\frac{d\Theta}{dt}$$ bulunur.

Diğer taraftan, $$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\Theta - r\sin\Theta\frac{d\Theta}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\Theta + r\cos\Theta\frac{d\Theta}{dt}$$

yukarıda yerlerine koyalım.

$$\frac{\partial V}{\partial x}\left[\frac{dr}{dt}\cos\Theta - r\sin\Theta\frac{d\Theta}{dt}\right] + \frac{\partial V}{\partial y}\left[\frac{dr}{dt}\sin\Theta + r\cos\Theta\frac{d\Theta}{dt}\right]$$

$$= \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \Theta}\frac{d\Theta}{dt}$$

$\frac{dr}{dt}$ ve $\frac{d\Theta}{dt}$ nin katsayılarını eşitliyelim.

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos\Theta + \frac{\partial V}{\partial y}\sin\Theta = \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}r\sin\Theta + \frac{\partial V}{\partial y}r\cos\Theta = \frac{\partial V}{\partial \Theta}$$ çözerek

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \cos\Theta\frac{\partial V}{\partial \Theta} - \frac{\sin\Theta}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

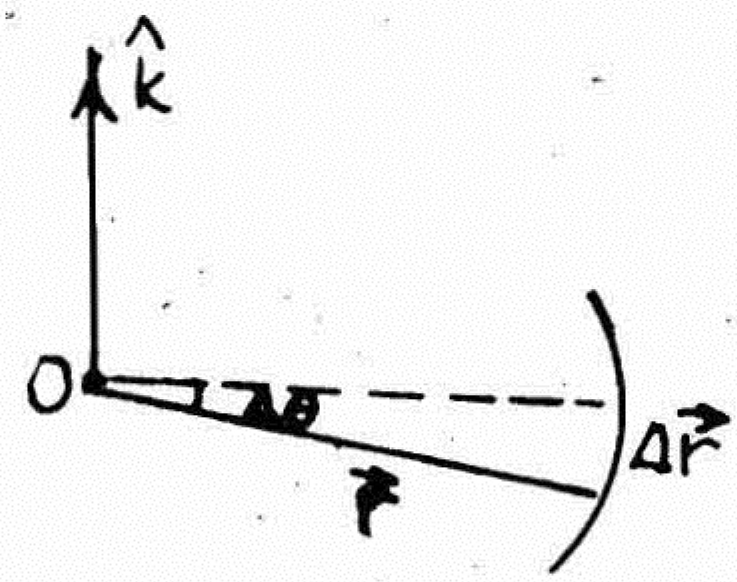
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\cos\Theta}{r}\frac{\partial V}{\partial \Theta} + \sin\Theta\frac{\partial V}{\partial r}$$

Bunların kareleri alınıp (2) de yerlerine koyulursa (1) elde edilir.

1.16 Açısal hız.

Mutlak değeri sabit olan bir $\vec{r}$ vektörünü O noktası etrafında $\Delta\Theta$ açısı kadar döndürelim. $\vec{r}$ ve $\Delta\vec{r}$ nin bulunduğu düzleme dik birim vektör $\hat{k}$ olsun. $\Delta\vec{r}$ hem $\vec{r}$ ye ve hem de $\hat{k}$ ya dik olduğundan, yönü $\hat{k} \times \hat{r}$ dir. Diğer taraftan $\Delta\vec{r}$ nin mutlak değeri $r\,\Delta\Theta$ dır. O halde,

$$\vec{\Delta r} = r\,\Delta\Theta\,(\hat{k} \times \hat{r}) = r\,\Delta\Theta\,\hat{k} \times \frac{\vec{r}}{r} = \Delta\Theta\,\hat{k} \times \vec{r}$$



$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Theta}{\Delta t}(\hat{k} \times \vec{r}) \quad \text{buradan}$$

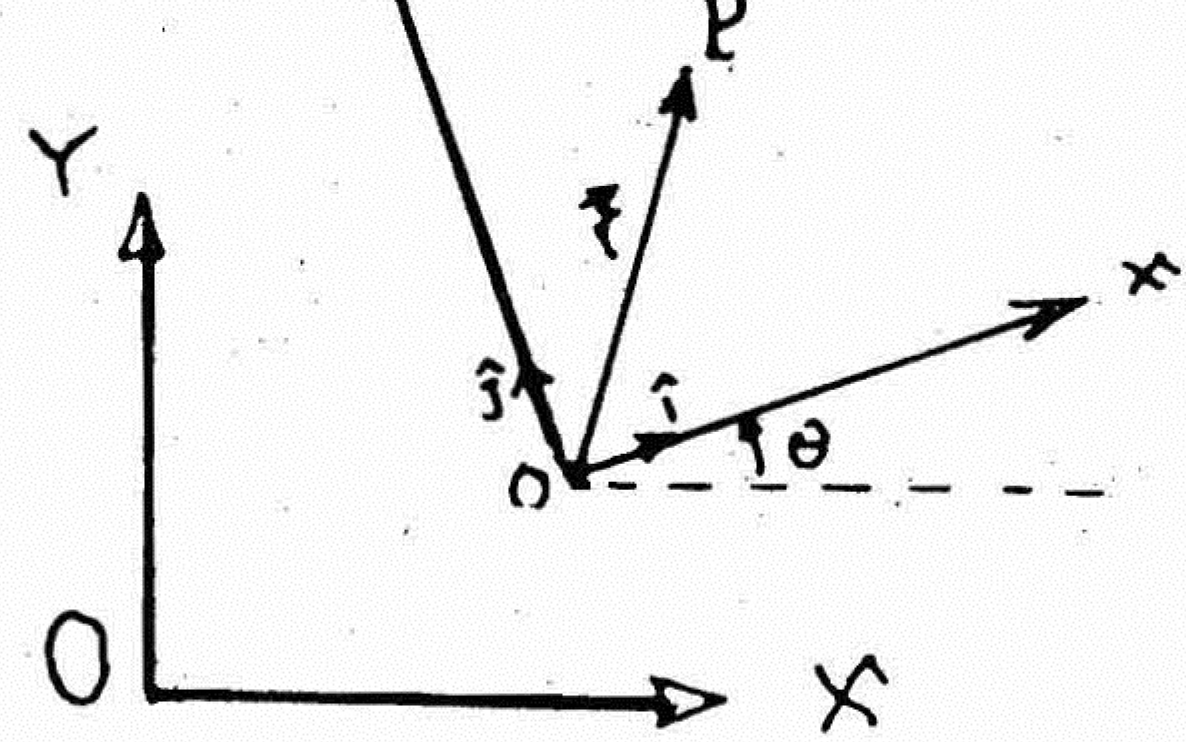
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (\frac{d\Theta}{dt}\hat{k}) \times \vec{r} \text{ elde ederiz. } (\frac{d\Theta}{dt}\hat{k}) \text{ ya açısal hız}$$

denir ve $\vec{\omega}$ ile gösterilir. Dolayısıyla $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ elde ederiz.

$\vec{r}$ nin uç noktası O noktası etrafında çenber çizdiğinden ve $\vec{r}$ ve $\vec{\omega}$ dik olacaklarından $\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r$ bulunur. Bu da dairesel hareketteki $v = \omega r$ teğetsel hızından başka bir şey değildir.

1. 17 Dönen eksenler.

XY sabit bir koodinat sistemi, xy de bu sisteme göre $\vec{\omega}$ açısal hızıyla dönen bir sistem olsun. $\vec{r}$ vektörünün XY sistemindeki türe-



vini (XY ye göre hızını) $\frac{d\vec{r}}{dt}$, xy sistemindeki türevini (xy ye göre hızını) $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ ile gösterelim.

$\vec{r} = r\hat{r}$ nin XY deki türevini alalım

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}, \quad \frac{d\hat{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{r} \text{ koyarak}$$

$$= \frac{dr}{dt}\hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$ elde ederiz. Diğer taraftan $\vec{r} = r\hat{r}$

nin (xy) deki türevini alalım $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t}\hat{r}$ ($\hat{r}$ nin xy de türevi alınırken $\hat{r}$ vektörü xy de sabittir). $\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{dr}{dt}$ olduğundan (zira, xy nin dönmesi $\vec{r}$ nin yalnız doğrultusunu değiştirir mutlak değerine etki etmez) $\frac{\partial \vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r}$ olur. Yukarıda yerine koyarsak

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$ elde ederiz. Veya sözle

Mutlak hız = izafi hız + dönme hızı.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \times$$ yı bir işlem-yapan (operatör) olarak telakki etmekte fayda vardır. Zira o zaman $\vec{r}$ nin mutlak hızını bulmak için bu işlem-yapanı $\vec{r}$ ye bir defa uygulamak yeter.

$\vec{r}$ nin mutlak ivmesini bulmak için işlem-yapanımızı bu sefer hız için bulduğumuz yukardaki ifadeye uygularız.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega x\right)\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \, x \, \vec{r}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2\vec{r}}{dt^2} \quad \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} \, x \, \vec{r} + \vec{\omega} \, x \, (\vec{\omega} \, x \, \vec{r}) + 2 \vec{\omega} \, x \, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

Burada $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, $\vec{r}$ nin sabit sisteme göre ivmesi;

$\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial t}$, $\vec{r}$ nin dönen sisteme göre ivmesi;

diğer terimler ise dönmeden dolayı meydana gelen ivmelerdir. **Bir çok** hallerde dönme sabit bir açısal hızla, olur, yani $\vec{\omega}$ = **sabit. Dolayısıyla**

$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} = o$ ve

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial t^2} + \vec{\omega} \, x \, (\vec{\omega} \, x \, \vec{r}) + 2 \vec{\omega} \, x \, \frac{\partial \vec{r}}{dt}$$

Sağ taraftaki ikinci terime merkezil ivme, sonuncuya ise Coriolis ivme denir.

1.18 Kutupsal koordinatlarda hız ve ivme.

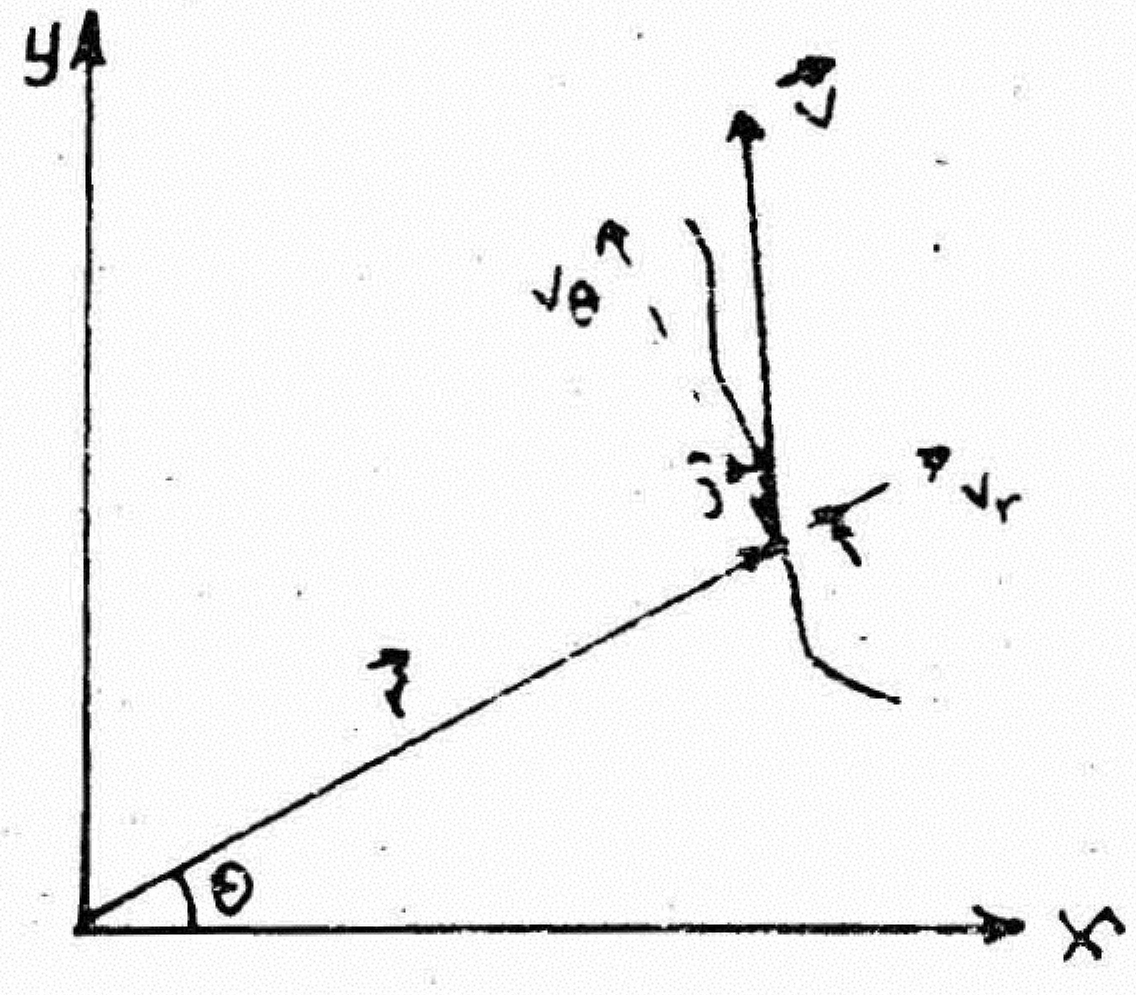
$\vec{r}$ vektörü sabit bir x doğrultusu ile Θ açısı yapsın.r doğrultu- tusundaki –radyal doğrultu– birim vektör $\hat{i}$, buna dik doğrultudaki –transvers doğrultu– birim vektör $\hat{j}$, bunlarla sağ el sistemi meydana getiren birim vektör $\hat{k}$ olsun.

$\vec{r} = r\hat{i}$ ve $\vec{\omega} = \dot{\Theta}\hat{k}$ yı

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \, x \, \vec{r}$ de yerlerine koyalım.

$$= \frac{\partial r\hat{i}}{\partial t} + \dot{\Theta}\hat{k} \times r\hat{i}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{i} + r\dot{\Theta}\hat{j}$$



O halde, hızın radial doğrultudaki bileşeni $\dot{r}$, buna dik doğrultuda ki bileşeni $r\dot{\Theta}$ dır:

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\theta = r\dot{\Theta}$$

ivmeyi bulmak için $\vec{r}$ ve $\vec{\omega}$ nın yukarıdaki değerlerini

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{\partial t^2} + \frac{\partial\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}$$ **de yer**

lerine koyarız.

$$= \frac{\partial^2 r\hat{i}}{\partial t^2} + \frac{\partial\dot{\Theta}\hat{k}}{\partial t} \times r\hat{i} + \dot{\Theta}\hat{k} \times (\dot{\Theta}\hat{k} \times r\hat{i}) + 2\,\dot{\Theta}\,\hat{k} \times \frac{\partial r\hat{i}}{\partial t}$$

$$= \ddot{r}\hat{i} + r\ddot{\Theta}\,\hat{k} \times \hat{i} + \dot{\Theta}\,\hat{k} \times (r\dot{\Theta}\,\hat{j}) + 2\dot{\Theta}\,\dot{r}\,\hat{k} \times \hat{i}$$

$$= \ddot{r}\hat{i} + r\ddot{\Theta}\,\hat{j} - r\dot{\Theta}^2\,\hat{i} + 2\dot{r}\,\dot{\Theta}\,\hat{j}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\Theta}^2)\,\hat{i} + (r\ddot{\Theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\Theta})\,\hat{j}$$

Dolayısiyle ivmenin radyal ve transvers doğrultudaki bileşenleri

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\Theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\Theta} + 2\dot{r}\,\dot{\Theta} \quad \text{dır.}$$

Özel hal olarak dairesel harekette r = sabit olduğundan, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ dır.

$\dot{\Theta} = \omega$ alarak.

Radial hız	=	normal hız	=	$v_n = 0$
Transvers hız	=	teğetsel hız	=	$v_t = r\omega$
Radial ivme	=	Normal ivme	=	$a_n = r\omega^2$ (yön merkeze doğru)
Transvers ivme	=	teğetsel ivme	=	$a_t = r\dot{\omega}$

elde edilir.

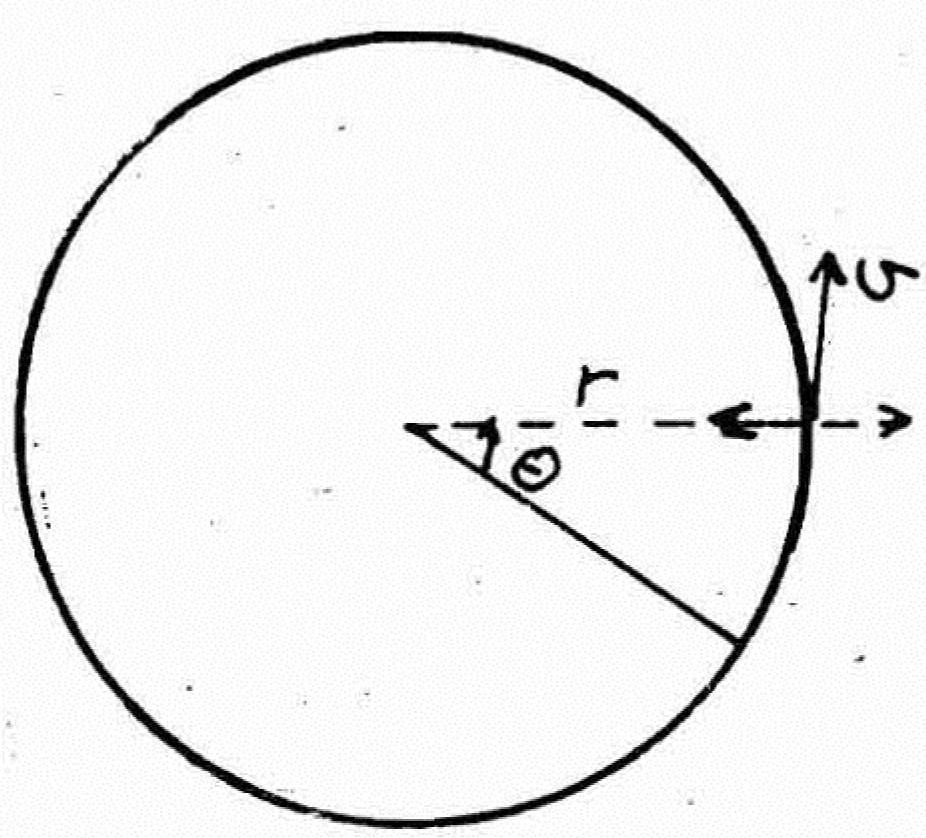
v_n sıfır olduğu için v_t nin indisi genellikle bırakılır, ve $v = r\omega$ yazılır.

Buradan bulunacak ω ve $\dot{\omega}$, a_n ve a_t de yerlerine konulursa,

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

formülleri elde edilir.



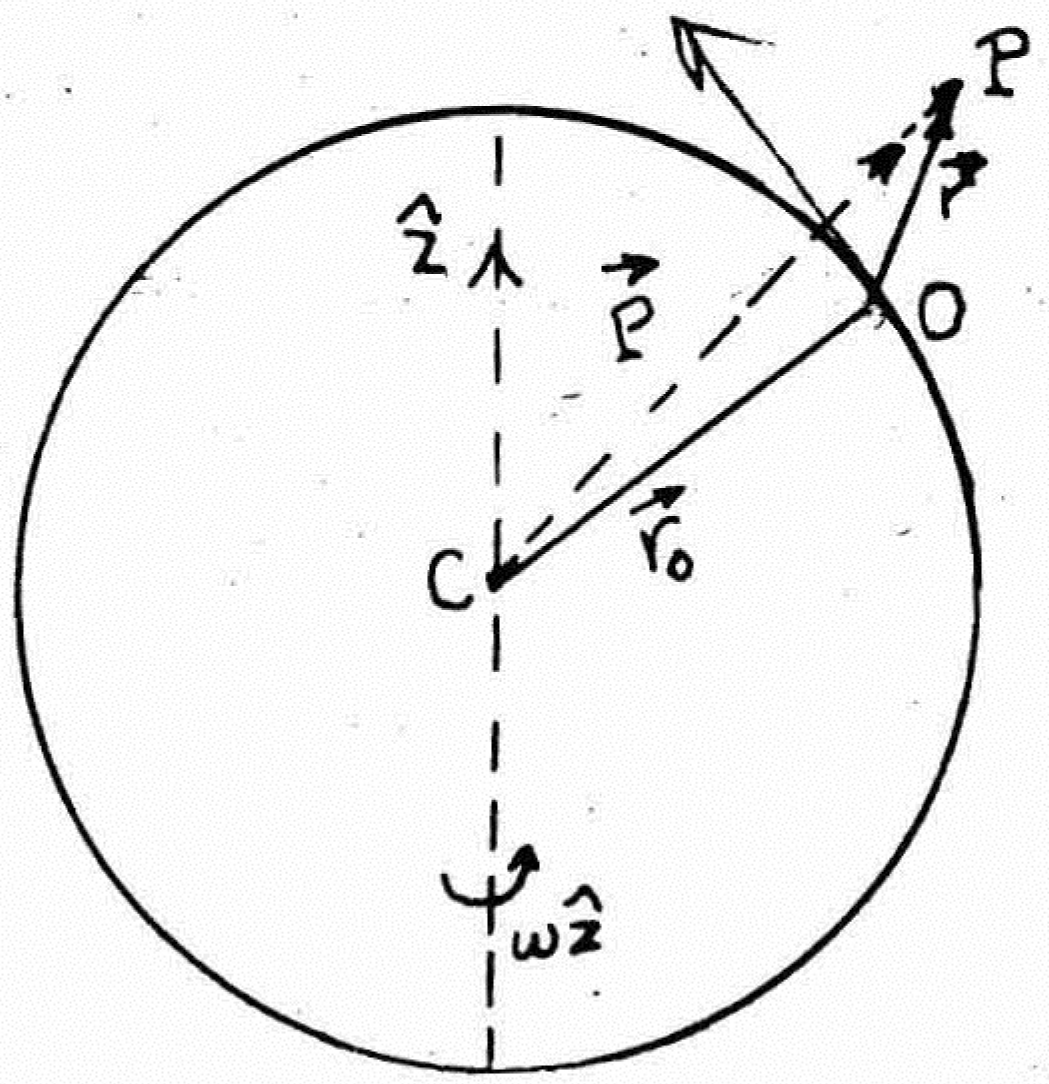
Merkeze doğru $\frac{v^2}{r}$ ivmesini meydana getiren $m\frac{v^2}{r}$ kuvvetine merkezil (santrıpedal) kuvvet denir. Cisim denge halinde olduğuna göre yukarıki kuvvete eşit ve fakat zıt yönde bir kuvvet olmalıdır. Bu kuvvete de merkezkaç (santrıfüj) kuvveti denir.

1.19 Problemler.

1. Yer yüzündeki bir O noktasından P de bulunan ve kütlesi m olan bir cismin hareketi gözlenmektedir. O daki bir koordinat sistemine göre m nin hareketinin denklemini (yâni kütle x ivme = kuvvet bağıntısını) bulunuz.

Çözüm: O daki koordinat sistemi, Yerin merkezindeki sabit bir koordinat sistemine göre $\omega\hat{z}$ = sabit açısl hızıyla dönmektedir.

P nin C ye göre hızı $\frac{d}{dt}\vec{P}$ dır.



$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \omega\hat{z}\,x \quad \text{koyarak,}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega\hat{z}\,x\right)(\vec{r}_o + \vec{r})$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \omega\hat{z}\,x\,\vec{r}_o + \omega\,\hat{z}\,x\,\vec{r} \quad \text{elde edilir.}$$

P nin C ye göre ivmesi

$$\frac{d^2\vec{P}}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega\hat{z}\,x\right)\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + (\omega\hat{z}\,x\,\vec{r}_o) + (\omega\hat{z}\,x\,\vec{r}\right)$$

$$= \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial t^2} + 2\omega\hat{z}\,x\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \omega^2\hat{z}\,x\,(\hat{z}\,x\vec{r}_o) + \omega^2\hat{z}\,x\,(\hat{z}x\,\vec{r})$$

Şimdi m kütlesine yer çekiminden dolayı $\vec{F}$ kuvveti tesir ediyorsa, bu kuvvet kütle ile ivmenin çarpımına eşittir, yâni

$$m \frac{d^2\vec{P}}{dt^2} = \vec{F} \quad \text{Dolayısiyle}$$

$$m \left[\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial t^2} + 2\omega\hat{z} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \omega^2\hat{z} \times (\hat{z} \times \vec{r}_o) + \omega^2\hat{z} \times (\hat{z} \times \vec{r}) \right] = \vec{F}$$

$$m \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial t^2} = F - 2m\omega\hat{z} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} - \omega^2 m\hat{z} \times (\hat{z} \times \vec{r}_o) - \omega^2 m\hat{z} \times (\hat{z} \times \vec{r})$$

aranılan hareket denklemidir. Pratikte $\omega = 2\pi/86400$ rad/san. çok küçük olduğundan ω^2 ihmal edilir, ve $\frac{\partial}{dt}$ yerine $\frac{d}{dt}$ kullanılır.

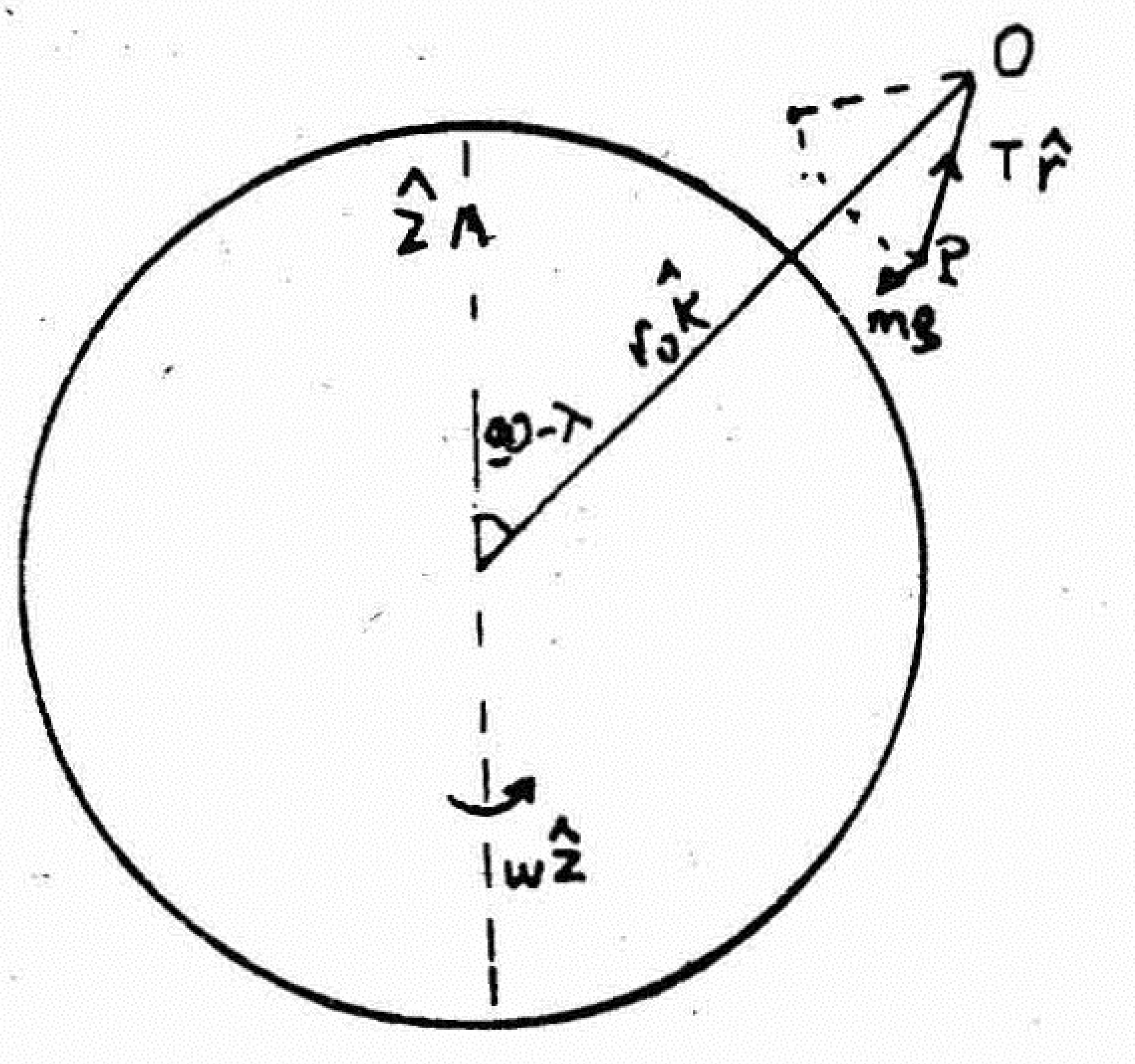
Bu durumda hareket denklemi.

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - 2\, m\omega\hat{z} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{halini alır.}$$

O halde m nin O ya göre hareket denklemini yazarken cisme tesir eden

$\vec{F}$ yer çekim kuvvetinden $2\, m\omega\hat{z} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ Coriolis kuvvetini çıkarmalıyız.

*2. Foucault sarkaç deneyinde sarkaç düzleminin $\omega' = -\omega\sin\lambda$ açısal hızıyla düşey etrafında döndüğün gösteriniz.



Çözüm: Cisim P de bulunsun ve O noktasına asılı olsun. P nin O ya göre hareketini inceliyeceğiz. P deki m cismine yer çekiminden dolayı mg kuvveti ve telin geriliminden dolayı T kuvveti tesir etmekte olup, toplam kuvvet

$$\vec{F} = -mg\hat{k} - T\hat{r} \qquad (1)$$

O halde, cismin O ya göre denklemi Problem 1. e göre

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - 2m\omega\hat{z} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{den}$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2m\omega\hat{z} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = -mg\hat{k} - T\hat{r}$$ olarak bulunur.

Buradan $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\omega\hat{z} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = -g\hat{k} - \frac{T}{m}\hat{r}$ elde edilir (2)

Şayet Yer dönmeseydi $\omega = O$ ve dolayısıyla

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -g\hat{k} - \frac{T}{m}\hat{r}$$ (3) normal sarkaç denklemi elde edilir.

Şimdi P nin hareket düzlemi içinde $\hat{k}$ etrafında $\omega'\hat{k}$ açısal hızıyla dönen bir koordinat sistemi düşünelim. Bu sisteme göre türevleri $\frac{\partial}{\partial t}$ ile gösterirsek $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \omega'\hat{k} \times$ olacağından $\vec{r}$ ye uygu-

luyarak $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \omega'\hat{k} \times \vec{r}$ olur. Tekrar uygularsak

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega'\hat{k} \times\right)\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \omega'\hat{k} \times \vec{r}\right)$$

$$= \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial t^2} + 2\omega'\hat{k} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \omega'^2\hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{r})$$ bulu-

ruz. Bunları (2) denkleminde yerlerine koyalım ve ω ve ω' küçük olduğundan ω'^2 ve $\omega\omega'$lü terimleri atalım.

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2\omega' \hat{k} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + 2\omega \hat{z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = -g\hat{k} - \frac{T}{m}\hat{r} \quad (4)$$

buluruz.

(4) denklemi P nin, kendi hareket düzlemindeki bir koordinat sistemine göre hareket denklemi olduğuna göre normal sarkaç denklemi olmalıdır.

Yani (4) ile (3) aynı olmalıdır. Bunun için görüldüğü gibi

$2\omega' \hat{k} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + 2\omega \hat{z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0$ olmalıdır. Bunu $\hat{r}$ ile vektörel olarak çarpalım.

$$2\omega' \hat{r} \times \hat{k} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + 2\omega \hat{r} \times \hat{z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0 \text{ olur.}$$

Halbuki $\hat{r} \times \hat{k} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = (\hat{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t})\, \hat{k} - (\hat{r} \cdot \hat{k})\, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$

$$\hat{r} \times \hat{z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = (\hat{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t})\, \hat{z} - (\hat{r} \cdot \hat{z})\, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

$\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$ (sabit) türev alarak $2\,\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0$ olur. $\hat{r}$ ile $\vec{r}$ ayni doğrultuda olduğundan $\hat{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ de sıfır olur. Hareket esnasında $\hat{r}$ ile $\hat{k}$ doğrultuları daima çok yakındır. o halde $\hat{r} \cdot \hat{k} \cong 1$ ve $\hat{r} \cdot \hat{z} \cong \sin\lambda$ alabiliriz. Yerlerine koyarsak

$-2\,(\omega' + \omega\sin\lambda)\, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0$ elde ederiz. Bunun sağlanabilmesi için de $\omega' = -\,\omega\sin\lambda$ olmalıdırki bu da isteneni ispatlar.

3. Hız ve ivmenin kutupsal koordinatlardaki bileşenlerini vektörel olmayan bir yolla çıkarınız.

Çözüm:

$$x = r\cos\Theta$$

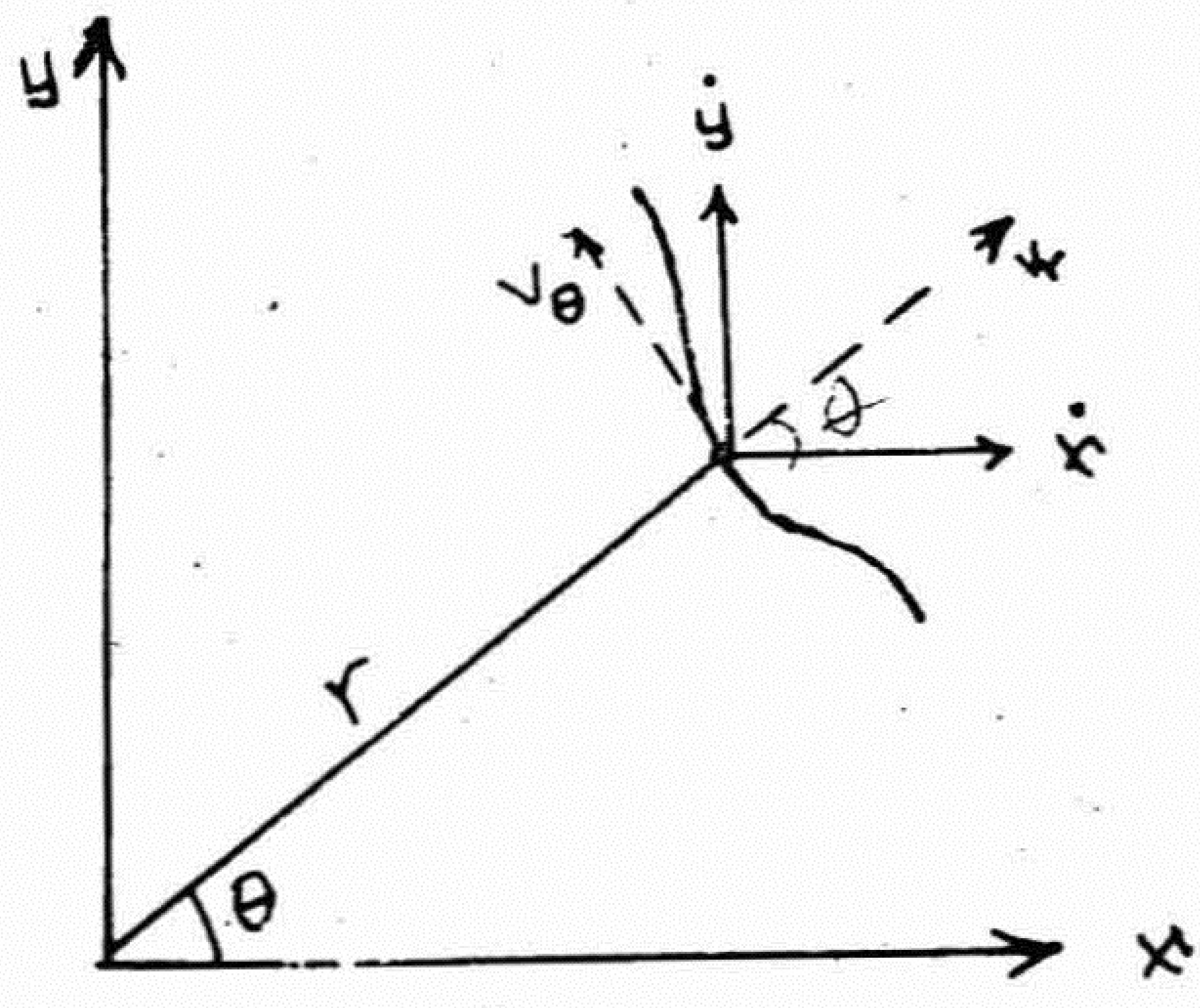
$$y = r\sin\Theta$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\Theta - r\dot{\Theta}\sin\Theta$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\Theta + r\dot{\Theta}\cos\Theta$$

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\Theta}^2)\cos\Theta - (2\dot{r}\dot{\Theta} + r\ddot{\Theta})\sin\Theta$$

$$\ddot{y} = (2\dot{r}\dot{\Theta} + r\ddot{\Theta})\cos\Theta + (\ddot{r} - r\dot{\Theta}^2)\sin\Theta$$



Dolayısıyla

$$v_r = \dot{x}\cos\Theta + \dot{y}\sin\Theta = \dot{r}$$

$$v_\theta = -\dot{x}\sin\Theta + \dot{y}\cos\Theta = r\dot{\Theta}$$

$$a_r = \ddot{x}\cos\Theta + \ddot{y}\sin\Theta = \ddot{r} - r\dot{\Theta}^2$$

$$a_\theta = -\ddot{x}\sin\Theta + \ddot{y}\cos\Theta = 2\dot{r}\dot{\Theta} + r\ddot{\Theta}$$