2.2. Lokal Bağlantılı Topolojik Uzaylar

Tanım 2.2.1. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer, her $x \in X$ noktası bağlantılı bir komşuluklar tabanına sahip oluyorsa, (X, τ) topolojik uzayına *lokal bağlantılıdır* denir.

Örnek 2.2.1. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ..., \mathbb{R}^n$ lokal bağlantılı topolojik uzaylardır.

Örnek 2.2.2. Lokal bağlantılılık kalıtımsal bir özellik değildir. Q rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ den indirgenen yapısıyla lokal bağlantılı değildir.

İspat: Biran için $(Q, \mathfrak{U}_Q)$ topolojik uzayının lokal bağlantılı olduğunu kabul edelim. O halde, her rasyonel sayı bağlantılı bir komşuluklar tabanına sahip olacaktır. $V = [-1, 1] \cap Q \in \mathcal{V}_{\mathfrak{U}_Q(0)}$ komşuluğu için de bu durum geçerlidir. O halde, $U \subset V$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{V}_{\mathfrak{U}_Q(0)}$ vardır öyle ki $\left(U, (\mathfrak{U}_Q)_U\right)$ bağlantılıdır. Diğer yandan; $U \in \mathcal{V}_{\mathfrak{U}_Q(0)}$ için $G = [-\varepsilon, \varepsilon] \cap Q \subset U$ olacak biçimde $\exists \varepsilon > 0$ vardır. Daima $\frac{1}{n} < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunabilir. Buradan

$$H = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \cap Q \subset G \subset U$$

olur. Bir $x \in \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\cap (X - Q)$ için $H' = [-x, x] \cap Q \in \mathcal{V}_{\mathfrak{U}_Q(0)}$ dır. H', $(Q, \mathfrak{U}_Q)$ topolojik uzayında hem açık hem kapalı bir öz alt kümedir. O halde $\left(U, (\mathfrak{U}_Q)_U\right)$ alt uzayında da hem açık hem kapalıdır. Bu ise U nun bağlantılı olması ile çelişir.

Teorem 2.2.1. Lokal bağlantılı bir topolojik uzayın açık her alt uzayı lokal bağlantılıdır.

İspat: (X,τ) lokal bağlantılı bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $A \in \tau$ olsun. $x \in A$ olmak üzere her $V \in \mathcal{V}_{\tau_A(x)}$ için $V = U \cap A$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{V}_{(x)}$ vardır. Bu durumda; $V \in \mathcal{V}_{(x)}$. X lokal bağlantılı olduğundan, $G \subset V$ olacak biçimde x noktasının bağlantılı bir $G \in \mathcal{V}_{(x)}$ komşuluğu vardır. G kümesi A alt uzayında da x noktasının bir komşuluğu olur. Bağlantılılık topolojik bir özellik olduğundan G, A nın da bağlantılı bir alt kümesidir. O halde, A lokal bağlantılıdır.

Örnek 2.2.3. Lokal bağlantılı bir topolojik uzay bağlantılı olmak zorunda değildir. Gerçekten; $X \neq \emptyset$ olmak üzere, $(X, P(X))$ diskre topolojik uzayı lokal bağlantılıdır, ancak bağlantılı değildir.

Örnek 2.2.4. Bağlantılı bir topolojik uzay lokal bağlantılı olmak zorunda değildir. $X_0 = [0,1] \times \{0\}, Y_0 = \{0\} \times [0,1]$ ve $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ için $Y_{1/n} = \{1/n\} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ olsun. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ için $M_n = Y_{1/n} \cup X_0$ olmak üzere,

$$Y = Y_0 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \right)$$

kümesinin $\mathbb{R}^2$ den indirgenen yapısıyla bağlantılı olduğu kolayca görülür. Ancak, Y lokal bağlantılı değildir. Biran için Y nin lokal bağlantılı olduğunu kabul edelim. O halde, $p = (0, 1/2) \in Y$ ve

$$W=\left(\left]-\varepsilon,+\varepsilon\right[\times\left]\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon\right[\right)\cap Y\in\mathcal{V}_{\tau_Y(p)}$$

için, $U\subset W$ olacak biçimde bağlantılı bir $U\in\mathcal{V}_{\tau_Y(p)}$ komşuluğu vardır. Diğer yandan; $Y_{1/n_0}\cap U\neq\emptyset$ olacak biçimde bir n_0 sayısı vardır. Buradan,

$$\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0+1}\right)$$

olmak üzere

$$Y'_{1/n_0}=\left(\left]\frac{1}{n_0}-\rho,\frac{1}{n_0}+\rho\right[\times\mathbb{R}\right)\cap U,$$

kümesi, U nun hem açık hem kapalı bir alt kümesidir. Bu ise U nun bağlantılı olması ile çelişir.

Örnek 2.2.5. Lokal bağlantılı bir topolojik uzayın sürekli görüntüsü lokal bağlantılı olmak zorunda değildir. Gerçekten;

$$A=\left\{\frac{1}{n}:n=1,2,...\right\}\text{ ve }B=A\cup\{0\}$$

olsun. B, $\mathbb{R}$ den indirgenen yapısıyla lokal bağlantılı değildir.Diğer yandan;

$$\begin{array}{rlll} f: & (\mathbb{N},\mathfrak{U}_{\mathbb{N}}) & \longrightarrow & (B,\mathfrak{U}_{\mathbb{B}}) \\ & n & \longrightarrow & f(n)=\begin{cases} 0, & n=0\ ise \\ 1/n, & n>0\ ise \end{cases} \end{array}$$

fonksiyonu sürekli ve örtendir.

Teorem 2.2.2. Lokal bağlantılılık topolojik bir özelliktir.

İspat: (X,τ) ve (Y,τ') iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir homeomorfizm olsun. X in lokal bağlantılı olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $y \in Y$ ve herhangi bir $V \in \mathcal{V}_{(y)}$ komşuluğu alalım. f örten olduğuna göre $y = f(x)$ olacak biçimde bir $x \in X$ vardır ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{(x)}$ dir. O halde, $U \subset f^{-1}(V)$ olacak biçimde bağlantılı bir $U \in \mathcal{V}_{(x)}$ komşuluğu vardır. Buradan

$$f(U) \subset f\left(f^{-1}(V)\right) \subset V$$

olur. Ayrıca $f(U)$, y noktasının bağlantılı bir komşuluğudur. O halde, Y lokal bağlantılıdır. Benzer şekilde, Y lokal bağlantılı olduğunda, X in de lokal bağlantılı olduğu gösterilebilir.

Teorem 2.2.3. (X_1,τ_1) ve (X_2,τ_2) iki topolojik uzay olsun ve $X = X_1 \times X_2$ kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 topolojileri yardımıyla tanımlanan çarpım topolojik yapısı $\mathfrak{S}$ ile gösterilsin. Bu durumda, aşağıdaki önermeler denktirler.

(i) $(X,\mathfrak{S})$ çarpım topolojik uzayı lokal bağlantılıdır,

(ii) (X_1,τ_1) ve (X_2,τ_2) topolojik uzayları lokal bağlantılıdır.

İspat: $i \Rightarrow ii$ İzdüşüm fonksiyonları sürekli, örten ve açık fonksiyonlar olduğundan, (X_1,τ_1) ve (X_2,τ_2) topolojik uzaylarının lokal bağlantılı olduğu kolayca görülür.

$ii \Rightarrow i$ $\forall x = (x_1,x_2) \in X, \forall W \in \mathcal{V}_{(x)}$ için, $U \times V \subset W$ olacak biçimde

$\exists U \in \mathcal{V}_{(x_1)}$ ve $\exists V \in \mathcal{V}_{(x_2)}$ vardır. Hipotezden, U ve V kümelerinin, x_1 ve x_2 noktalarının birer bağlantılı komşuluğunu kapsayacakları açıktır. Bağlantılı iki uzayın kartezyen çarpımıda bağlantılı olduğuna göre, bu komşulukların kartezyen çarpımının da, x noktasının W tarafından kapsanan bağlantılı bir komşuluğu olduğu kolaylıkla gösterilebilir.