Kritik Nokta Türleri (Devam)

2. Semer Noktası. Yolların dört tane yarı doğru ve hiperbol benzeri eğrilerden oluştuğu bir kritik nokta bir semer noktasıdır. Böyle bir noktaya $t \to \infty$ için iki yarı doğru boyunca, $t \to -\infty$ için diğer iki yarı doğru boyunca yaklaşılır ve girilir. Hiperboller boyunca kritik noktaya yaklaşma ve girme yoktur.

Örnek 2.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = w^2 x, \;\; w > 0 \end{cases} \tag{1}$$

sistemini ele alalım. $(0,0)$ (1) sisteminin tek kritik noktasıdır. Bu sistemin genel çözümü

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-wt} + c_2 e^{wt} \\ y(t) = -c_1 w e^{-wt} + c_2 w e^{wt} \end{cases} \tag{2}$$

dir, burada c_1 ve c_2 keyfi reel sabitlerdir.

(i) $c_1 = 0$ ise, bu durumda (2) den

$$\begin{cases} x(t) = c_2 e^{wt} \\ y(t) = c_2 w e^{wt} \end{cases} \tag{3}$$

elde edilir. Bu durumda (3) den $c_2 > 0$ için $y = wx;\ x > 0,\ y > 0$ yarı doğrusu, $c_2 < 0$ için $y = wx;\ x < 0,\ y < 0$ yarı doğrusu yoldur. Bu yollar boyunca $t \to -\infty$ için orijine yaklaşma ve girme vardır.

(ii) $c_2 = 0$ ise, bu durumda (2) den

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-wt} \\ y(t) = -c_1 w e^{-wt} \end{cases} \tag{4}$$

elde edilir. Bu durumda (4) den $c_1 > 0$ için $y = -wx;\ x > 0,\ y < 0$ yarı doğrusu, $c_1 < 0$ için $y = -wx;\ x > 0,\ y < 0$ yarı doğrusu yoldur. Bu yollar boyunca $t \to \infty$ için orijine yaklaşma ve girme vardır.

(iii) $c_1 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ ise, yollar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w^2 x}{y} \tag{5}$$

diferensiyel denkleminin çözümleridir. (5) diferensiyel denklemi çözüldüğünde

$$y^2 - w^2x^2 = c^2$$

hiperbolleri elde edilir. (2) den açık olarak görülmektedir ki hiperboller boyunca ne $t \to \infty$ ne de $t \to -\infty$ için kritik noktaya yaklaşma ve girme yoktur.

O halde (1) sisteminin $(0,0)$ kritik noktası bir semer noktasıdır.

3. Merkez Nokta. Bir kapalı yol ailesi ile çevrili bir kritik nokta merkez noktadır. Böyle bir noktaya $t \to \infty$ ya da $t \to -\infty$ için yaklaşma ve girme yoktur.

Örnek 3.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases} \tag{6}$$

sistemini ele alalım. $(0,0)$ (6) sisteminin tek kritik noktasıdır. Bu sistemin genel çözümü

$$\begin{cases} x(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \end{cases}$$

dir, burada c_1 ve c_2 keyfi reel sabitlerdir.

(6) sistemindeki denklemler arasından t yok edilirse,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü olan

$$x^2 + y^2 = c^2, \ c \neq 0,$$

eğrileri (6) sisteminin yollarını ifade eder. Açık olarak bu eğriler kritik nokta etrafında kapalı yollardır. Dolayısıyla $(0,0)$ merkez noktadır.

4. Sarmal Nokta (Spiral). Etrafında sarmal biçimde sonsuz sayıda dönen yollar ile çevrili bir kritik nokta sarmal noktadır. Böyle bir noktaya bir yol boyunca $t \to \infty$ ya da $t \to -\infty$ için yaklaşma vardır ancak girme yoktur.

Örnek 4. a bir sabit olmak üzere

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = x + ay \end{cases} \tag{7}$$

sistemini ele alalım. $(0,0)$ (7) sisteminin tek kritik noktasıdır. Yolların diferensiyel denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + ay}{ax - y} \tag{8}$$

şeklindedir. (8) diferensiyel denklemi

$$x = r\cos\theta, \;\; y = r\sin\theta$$

kutupsal koordinatları kullanılarak

$$\frac{dr}{d\theta} = ar \tag{9}$$

diferensiyel denklemine indirgenir. (9) denkleminin çözümü

$$r = ce^{a\theta} \tag{10}$$

olup (10) yolların kutupsal koordinatlardaki gösterimidir. Açık olarak görülmektedir ki yollar orijin etrafında sonsuz sayıda dönen spiral eğrileridir. O halde $(0,0)$ kritik noktası bir sarmal noktadır.