Kararlılık

Bu bölümde

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

otonom sistemi ele alınacaktır, burada F ve G düzlemin bir D bölgesinde sürekli ve birinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlardır.

Uyarı 1. Daha önce belirtildiği üzere (1) sisteminin $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ kritik noktası $(0,0)$ kritik noktasına indirgenebilir. Diğer yandan (1) sisteminin bir $x = x_1(t),\ y = y_1(t)$ çözümü de $(0,0)$ kritik noktasına indirgenebilir. Gerçekten,

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases}$$

(1) sisteminin çözümü ise, bu durumda

$$\begin{aligned} x_1' &= F(x_1, y_1) \\ y_1' &= G(x_1, y_1) \end{aligned}$$

dir. Diğer yandan

$$v = x - x_1,\ w = y - y_1$$

dönüşümü yardımıyla

$$x' = v' + x_1',\ y' = w' + y_1'$$

(1) sisteminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} v' + x_1' &= F(v + x_1, w + y_1) \\ w' + y_1' &= G(v + x_1, w + y_1) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{cases} v' = F(v + x_1, w + y_1) - F(x_1, y_1) \\ w' = G(v + x_1, w + y_1) - G(x_1, y_1) \end{cases} \tag{2}$$

yazılabilir. Buna göre (1) sisteminin $x = x_1(t),\ y = y_1(t)$ çözümü, (2) sisteminin $(0,0)$ kritik noktasına indirgenebilir.

Şimdi (1) sisteminin ayrık bir kritik noktasını göz önüne alalım ve genelliği bozmaksızın bu noktanın faz düzleminin $(0,0)$ orijin noktası olduğunu kabul edelim.

Tanım 1. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık aşağıdaki koşullar geçerli olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, bu durumda $(0,0)$ kritik noktası kararlıdır ya da Lyapunov anlamında kararlıdır denir:

(i) Herhangi bir $t = t_0$ değerine karşılık $(0,0)$ ın δ komsuluğunda bulunan (1) in her yolu $t \leq t_0 < \infty$ için tanımlıdır.

(ii) Bir yol (i) koşulunu sağlıyor ise, o yol $t_0 \leq t < \infty$ için $(0,0)$ ın ε komşuluğunda kalır.

Başka bir anlatım ile, $(0,0)$ noktası kararlı ise, bu durumda $t = t_0$ da δ yarıçaplı $x^2 + y^2 = \delta^2$ çemberi içerisinde bulunan her $C: \ x = x(t), \ y = y(t)$ yolu, her $t \geq t_0$ için ε yarıçaplı $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ çemberi içerisinde kalır.

Kritik nokta kararlı değilse, kararsızdır denir.

Tanım 2. (i) ve (ii) koşullarını sağlayan her C yolu için ayrıca

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \text{ ve } \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

sağlanıyorsa, bu durumda $(0,0)$ kritik noktasına asimptotik kararlıdır denir.

Şimdi

$$x' = f(t,x) \tag{3}$$

sistemini ele alalım, burada $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T, \ f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T, \ f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ olup, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ açık bir bölgedir.

(3) sisteminin

$$x(t_0) = x_0$$

koşulunu sağlayan çözümü $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ olsun.

Tanım 3. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, (3) sisteminin her $\overline{x}(t) = x(t, t_0, \overline{x}_0)$ çözümü için

$$\|\overline{x}_0 - x_0\| < \delta$$

olduğu zaman

$$\|\overline{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon, \text{ her } t \geq t_0,$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ sayısı varsa, bu durumda $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ çözümüne kararlıdır denir.

(3) sisteminin $x(t)$ çözümü kararlı değilse, çözüme kararsızdır denir.

Tanım 4. (3) sisteminin $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ çözümü kararlı olsun.

$$\|\overline{x}_0 - x_0\| < \delta_0$$

olduğu zaman

$$\lim_{t\to\infty} \|\overline{x}(t) - x(t)\| = 0$$

olacak şekilde bir $\delta_0 > 0$ sayısı varsa, bu durumda $x(t)$ çözümüne asimptotik kararlıdır denir.

Örnek 1.

$$\frac{dx}{dt} = -a^2 x,\ a \neq 0, \tag{4}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{5}$$

probleminin

$$x(t) = x_0 e^{-a^2(t-t_0)}$$

çözümünün kararlılığını inceleyiniz.

Çözüm. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\overline{x}(t) = x(t, t_0, \overline{x}_0)$ (4) denkleminin $x(t_0) = \overline{x}_0$ koşulunu sağlayan çözümü olmak üzere

$$\begin{aligned} |\overline{x}(t) - x(t)| &= |\overline{x}_0 - x_0|\, e^{-a^2(t-t_0)} \\ &\leq |\overline{x}_0 - x_0|\,,\ \text{her } t \geq t_0, \end{aligned}$$

dır. O halde

$$|\overline{x}_0 - x_0| < \delta$$

olduğunda

$$|\overline{x}(t) - x(t)| < \varepsilon,\ t \geq t_0,$$

olacak şekilde $\delta = \varepsilon$ mevcuttur. Dolayısıyla, (4)-(5) probleminin $x(t) = x_0 e^{-a^2(t-t_0)}$ çözümü kararlıdır. Ayrıca

$$\lim_{t\to\infty} |\overline{x}(t) - x(t)| = 0$$

olduğundan çözüm asimptotik kararlıdır.