2.4. Eğrisel Bağlantılı Topolojik Uzaylar

Tanım 2.4.1. (X, τ) bir topolojik uzay, $a, b \in X$ olsun. Bir $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ için, $f : (I, \mathfrak{U}_I) \longrightarrow (X, \tau)$ biçiminde tanımlı sürekli bir f fonksiyonu mevcut ve f fonksiyonu $f(\alpha) = a$ ve $f(\beta) = b$ koşulunu gerçekliyor ise, f fonksiyonuna a noktasını b noktasına bağlayan bir *eğri* (veya yol) adı verilir.

$c \in X, a \neq c$ ve $b \neq c$ olsun. Eğer; $c \in f(I)$ ise, a noktasını b noktasına bağlayan eğri c noktasından geçiyor denir. Eğer; $A \subset \mathbb{R}$ ve $A \cap f(I) \neq \emptyset$ ise, a noktasını b noktasına bağlayan eğri A kümesinden geçiyor denir.

Önerme 2.4.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $f : I \longrightarrow X$ fonksiyonu X uzayının herhangi iki noktasını birbirine bağlayan bir eğri olsun. Bu durumda, $f(I)$, X in bağlantılı bir alt kümesidir.

İspat: I bir aralık ve bağlantılılık sürekli ve örten fonksiyonlar altında invaryant olduğundan açıktır.

Teorem 2.4.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $a, b, c \in X$ olsun. Eğer, a noktasını b noktasına ve b noktasını c noktasına bağlayan bir eğri varsa, a noktasını c noktasına bağlayan bir eğri de vardır.

İspat: Hipotezden $a, b, c \in X$ için, $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ve $I' = [\alpha', \beta'] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f_1 : I \longrightarrow X \text{ ve } g_1 : I' \longrightarrow X$$

sürekli fonksiyonları mevcuttur ve $f_1(\alpha) = a, f_1(\beta) = b, g_1(\alpha') = b, g_1(\beta') = c$ dir. Diğer yandan;

$$\begin{array}{rccl} f_2 : & [0,1] & \longrightarrow & I \\ & t & \longrightarrow & f(t) = (\beta - \alpha)\, t + \alpha \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccl} g_2 : & [0,1] & \longrightarrow & I' \\ & t & \longrightarrow & g_2(t) = (\beta' - \alpha')\, t + \alpha' \end{array}$$

sürekli fonksiyonları yardımıyla; $f = f_1 \circ f_2$ ve $g = g_1 \circ g_2$ fonksiyonlarını tanımlayalım. f ve g sürekli fonksiyonlardır. Dolayısıyla

$$\begin{array}{rccl} h : & [0,1] & \longrightarrow & X \\ & t & \longrightarrow & h(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, 1/2[\ ise \\ g(2t-1), & t \in [1/2, 1] \ ise \end{cases} \end{array}$$

biçiminde tanımlanan h fonksiyonu sürekli ve $h(0) = a, h(1) = c$ dir. Yani a ile c noktalarını bağlayan bir eğri vardır.

Tanım 2.4.2. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $\forall x, y \in X$ için, x noktasını y noktasına bağlayan bir eğri varsa, (X, τ) topolojik uzayına *eğrisel bağlantılıdır* denir.

Örnek 2.4.1. $(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ eğrisel bağlantılı bir topolojik uzaydır. Gerçekten; $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{array}{rlll} f: & [0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ & t & \longrightarrow & f(t) = (b-a)t + a \end{array}$$

fonksiyonu sürekli ve $f(0) = a, f(1) = b$ dir. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ..., \mathbb{R}^n$ de eğrisel bağlantılıdır. Benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 2.4.2. Eğrisel bağlantılı her topolojik uzay bağlantılıdır.

İspat: (X, τ) eğrisel bağlantılı olsun, fakat bağlantılı olmasın. Bu durumda,

$$\exists A, B \in \tau, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset : X = A \cup B \text{ ve } A \cap B = \emptyset,$$

dir. O halde, $\exists a \in A$ ve $\exists b \in B$ vardır. X eğrisel bağlantılı olduğuna göre;

$$f : I = [\alpha, \beta] \longrightarrow X$$

biçiminde tanımlı sürekli bir f fonksiyonu mevcuttur ve $f(\alpha) = a, f(\beta) = b$ dir. f sürekli olduğundan, $f([\alpha, \beta])$ kümesi X uzayının bağlantılı bir alt kümesidir. Diğer yandan; $A \cap f([\alpha, \beta]) \neq \emptyset, B \cap f([\alpha, \beta]) \neq \emptyset, f([\alpha, \beta]) \subset A \cup B$ ve $A \cap B \cap f([\alpha, \beta]) = \emptyset$ elde edilir. Bu ise, $f([\alpha, \beta])$ nın bağlantılı olması ile çelişir. O halde kabulumüz yanlıştır.

Teorem 2.4.1 de verilen önermenin karşıtı her zaman doğru değildir. Yani bağlantılı bir uzayın, eğrisel bağlantılı olması gerekmez.

Örnek 2.4.2. $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{S})$ alışılmış yapısıyla ele alınsın.

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x > 0 \text{ için } y = \sin \frac{1}{x} \right\} \cup \{(0,0)\}$$

$\mathbb{R}^2$ nin bağlantılı bir alt kümesidir. Ancak eğrisel bağlantılı değildir.

İspat: $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin \frac{1}{x}$ fonksiyonu süreklidir. O halde grafiği yani $B- \{(0,0)\}$ bağlantılıdır. Diğer yandan, $B- \{(0,0)\} \subset B \subset \overline{B - \{(0,0)\}}$ olduğundan, B de bağlantılı bir alt kümedir. Ancak, f fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreksiz olduğundan, herhangi bir $a > 0$ için $p = \left(a, \frac{1}{a}\right) \in B$ ve $q = (0,0) \in B$ noktalarını bağlayan bir eğri bulunamaz. O halde, B eğrisel bağlantılı değildir.

Örnek 2.4.3. $(\mathbb{Z}, \mathfrak{U}_{\mathbb{Z}})$ topolojik uzayı bağlantılı olmadığına göre eğrisel bağlantılı değildir.

Sonuç 2.4.1. Eğrisel bağlantılılık kalıtımsal bir özellik değildir.

Teorem 2.4.3. (X, τ) bir topolojik uzay, $J \neq \emptyset$ bir indis kümesi $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in J} \subset P(X)$ ile de X in eğrisel bağlantılı alt uzaylarının ailesi gösterilsin. Eğer, $\cap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$ ise, $B = \cup_{i \in J} A_i$ eğrisel bağlantılıdır.

İspat: $\forall a, b \in B : \exists i_a, i_b \in J \ni a \in A_{i_a}$ ve $b \in A_{i_b}$ dir. Diğer yandan; $\cap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$ ise, $\exists p \in X$ vardır öyle ki $\forall i \in J : p \in A_i$ dir. O halde, $I =$

$[\alpha, \beta]$, $I' = [\alpha', \beta'] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g : I \longrightarrow A_{i_a}$$

biçiminde tanımlı sürekli bir g fonksiyonu vardır öyle ki $g(\alpha) = p$ ve $g(\beta) = a$ dır ve

$$h : I' \longrightarrow A_{i_b}$$

biçiminde tanımlı sürekli bir h fonksiyonu vardır öyle ki $h(\alpha') = p$ ve $h(\beta') = b$ dir. Buradan, eğrisel bağlantılılık geçişmeli bir özellik olduğuna göre, a noktası ile b noktasını bağlayan bir eğrinin varlığı açıktır. Yani, B eğrisel bağlantılıdır.

Teorem 2.4.4. Eğrisel bağlantılılık topolojik bir özelliktir.

İspat: (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir homeomorfizm olsun. (X, τ) topolojik uzayının eğrisel bağlantılı olduğunu kabul edelim. $\forall a, b \in Y$ için, f örten olduğundan,

$$f(a') = a \text{ ve } f(b') = b \text{ olacak biçimde } \exists a', b' \in X$$

vardır. X eğrisel bağlantılı olduğuna göre, bir $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ için, $g : I \longrightarrow X$ biçiminde tanımlı, sürekli bir g fonksiyonu mevcuttur ve $g(\alpha) = a', g(\beta) = b'$ eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla, sürekli f ve g fonsiyonları yardımıyla tanımlanan

$$\begin{aligned} h = f \circ g : \quad I &\longrightarrow X &&\longrightarrow Y \\ t &\longrightarrow x = g(t) &&\longrightarrow y = f(g(t)) \end{aligned}$$

fonksiyonu da süreklidir ve

$$h(\alpha) = a, h(\beta) = b$$

dir. O halde, Y eğrisel bağlantılıdır. Benzer şekilde, Y eğrisel bağlantılı olduğunda, (X, τ) topolojik uzayının da eğrisel bağlantılı olacağı gösterilebilir.

Sonuç 2.4.1. Eğrisel bağlantılı bir topolojik uzayın sürekli bir fonksiyon altında ki görüntüsü de eğrisel bağlantılıdır.

Sonuç 2.4.2. $\mathbb{R}$ alışılmış yapısıyla gözönüne alındığında, her alt aralığı eğrisel bağlantılıdır.

Örnek 2.4.4. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $y = ax$ doğrularının grafiklerinin oluşturduğu küme, $\mathbb{R}^2$ nin eğrisel bağlantılı bir alt kümesidir. Gerçekten, $\forall a \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{array}{rccc} f_a : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f_a(x) = ax \end{array}$$

biçiminde tanımlı f_a fonksiyonları süreklidir. Sürekli her fonksiyonun tanım uzayı grafiğine homeomorf olacağından, $\forall a \in \mathbb{R}$ için $y = ax$ doğrularının grafikleri $\mathbb{R}^2$ nin eğrisel bağlantılı alt uzaylarıdır ve $(0, 0)$ ortak noktasına sahiptirler. Dolayısıyla, birleşimleri de eğrisel bağlantılıdır.