Lineer Denklem Sistemleri İçin Kritik Noktalar ve Kararlılık

Bu bölümde sabit katsayılı, lineer, homogen

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases} \tag{1}$$

sistemi ele alınmaktadır. Burada a_1, a_2, b_1, b_2 katsayıları reel sabitlerdir.

(1) sisteminin $(0, 0)$ kritik noktasına sahip olduğu açıktır.

Uyarı 1. Bu kesimde

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \tag{2}$$

olduğu kabul edilecektir. (2) koşulu $(0, 0)$ noktasının tek kritik nokta olmasını garanti eder.

Daha önce görüldüğü üzere (1) sisteminin karakteristik denklemi

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \tag{3}$$

dır ve karakteristik denklemin bir kökü m olmak üzere (1) sistemi

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{mt} \\ y(t) = Be^{mt} \end{cases}$$

şeklinde aşikar olmayan bir çözüme sahiptir.

m_1 ve m_2, (3) karakteristik denkleminin kökleri olsun. Buna göre (1) sisteminin $(0, 0)$ kritik noktasının yapısının m_1 ve m_2 köklerinin yapısıyla belirleneceği görülecektir. Buna göre aşağıdaki beş durum karşımıza çıkmaktadır:

TEMEL DURUMLAR

Durum 1. m_1 ve m_2 kökleri reel, farklı ve aynı işaretlidir.

Durum 2. m_1 ve m_2 kökleri reel, farklı ve zıt işaretlidir.

Durum 3. m_1 ve m_2 kökleri eşlenik kompleks ancak sırf sanal değildir.

SINIRDAKİ DURUMLAR

Durum 4. m_1 ve m_2 kökleri reel ve eşittir.

Durum 5. m_1 ve m_2 kökleri sırf sanaldır.

Teorem 1. (3) karakteristik denkleminin m_1 ve m_2 kökleri reel, farklı ve aynı işaretli olsun. Bu durumda $(0,0)$ kritik noktası bir düğüm noktasıdır. Ayrıca $m_1, m_2 < 0$ ise kritik nokta asimptotik kararlı, $m_1, m_2 > 0$ ise kritik nokta kararsızdır.

Örnek 1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y \end{cases} \tag{4}$$

sisteminin kritik noktasının yapısını belirleyiniz.

Çözüm. Verilen sistemde açık olarak $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ olup $(0,0)$ tek kritik noktadır. (4) sistemine ilişkin karakteristik denklem

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

olup $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ kökleri reel, birbirinden farklı ve aynı işaretlidir. O halde Teorem 1 den $(0,0)$ kritik noktası bir düğüm noktasıdır. Ayrıca $m_1, m_2 > 0$ olduğundan, kararsız bir noktadır.

Teorem 2. (3) karakteristik denkleminin m_1 ve m_2 kökleri reel, farklı ve zıt işaretli olsun. Bu durumda $(0,0)$ kritik noktası bir semer noktasıdır ve kararsızdır.

Örnek 2.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases} \tag{5}$$

sisteminin kritik noktasının yapısını belirleyiniz.

Çözüm. Verilen sistemde açık olarak $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ olup $(0,0)$ tek kritik noktadır. (5) sistemine ilişkin karakteristik denklem

$$m^2 - 1 = 0$$

olup $m_1 = -1,\ m_2 = 1$ kökleri reel, birbirinden farklı ve zıt işaretlidir. O halde Teorem 2 den $(0,0)$ kritik noktası bir semer noktası olup kararsızdır.

Teorem 3. (3) karakteristik denkleminin m_1 ve m_2 kökleri eşlenik kompleks ancak sırf sanal değil ise, bu durumda $(0,0)$ kritik noktası bir sarmal noktadır. Ayrıca $m_1, m_2 = a \pm ib$ olmak üzere $a < 0$ ise kritik nokta asimptotik kararlı, $a > 0$ ise kritik nokta kararsızdır.

Örnek 3.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 4x - 5y \end{cases} \tag{6}$$

sisteminin kritik noktasının yapısını belirleyiniz.

Çözüm. Verilen sistemde açık olarak $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ olup $(0,0)$ tek kritik noktadır. (6) sistemine ilişkin karakteristik denklem

$$m^2 + 6m + 13 = 0$$

dır. $m_1 = -3 + 2i,\ m_2 = -3 - 2i$ kökleri kompleks olup sırf sanal değildir. O halde Teorem 3 den $(0,0)$ kritik noktası bir sarmal noktadır. Ayrıca $a < 0$ olduğundan kritik nokta asimptotik kararlıdır.