Lyapunov Yöntemi İle Kararlılık

Bir fiziksel sistemin toplam enerjisi belli bir kritik noktada bir yerel minimuma sahip ise, bu durumda kritik noktanın sezgisel olarak kararlı olduğu anlaşılır. Bu düşünce daha kapsamlı olarak kararlılık problemlerinin incelenmesinde etkili bir yöntemle Lyapunov tarafından geliştirilmiştir.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

şeklinde bir otonom sistemi ele alalım. Bu bölümde $(0,0)$ noktasının (1) sistemin bir ayrık kritik noktası olduğu kabul edilmektedir. Bilindiği üzere bir (x_0, y_0) kritik noktası daima orijine dönüştürülebileceğinden, bu varsayımın genelliği bozmayacağı açıktır.

Uyarı 1. $C = [x(t), y(t)]$, (1) sisteminin bir yolu olsun. Bu yolu kapsayan bir bölgede kendisi ve birinci basamaktan kısmi türevleri sürekli olan bir $V(x,y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bir (x,y) noktası C yolu boyunca hareket ediyor ise, bu durumda $V(x,y)$, C boyunca t nin bir fonksiyonu olarak düşünülebilir. Bu fonksiyon $V(t)$ ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G \end{aligned} \tag{2}$$

şeklinde olur.

Tanım 1. $V(x,y)$ fonksiyonu orijini kapsayan bir bölgede sürekli ve birinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip olsun. Ayrıca $V(0,0) = 0$ olsun. $(x,y) \neq (0,0)$ için $V(x,y) > 0$ ise, bu durumda V fonksiyonuna pozitif definittir; $(x,y) \neq (0,0)$ için $V(x,y) < 0$ ise, bu durumda V fonksiyonuna negatif definittir denir. Benzer olarak $(x,y) \neq (0,0)$ için $V(x,y) \geq 0$ ise, bu durumda V fonksiyonuna pozitif yarı definittir; $(x,y) \neq (0,0)$ için $V(x,y) \leq 0$ ise, bu durumda V fonksiyonuna negatif yarı definittir denir.

Örnek 1. a ve b pozitif sabitler, m, n pozitif tamsayılar olmak üzere $ax^{2m} + by^{2n}$ şeklindeki fonksiyonlar pozitif definittir.

Tanım 2. $V(x,y)$ fonksiyonu pozitif definit ve

$$\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G \tag{3}$$

negatif yarı definit özelliğine sahip ise, bu durumda $V(x,y)$ fonksiyonuna (1) sistemi için bir Lyapunov fonksiyonudur denir.

Uyarı 2. (2) formülü nedeniyle $\dfrac{\partial V}{\partial x}F + \dfrac{\partial V}{\partial y}G$ fonksiyonunun negatif yarı definit olması $\dfrac{dV}{dt} \leq 0$ olması demektir. Bu yüzden V fonksiyonu orijin komşuluğunda (1) sisteminin yolları boyunca artmayan bir fonksiyondur.

Teorem 1. (1) sistemi için bir Lyapunov fonksiyonu mevcut ise, bu durumda $(0,0)$ kritik noktası kararlıdır. Ayrıca, bu fonksiyon (3) fonksiyonunun negatif definit olma özelliğine sahip ise, bu durumda $(0,0)$ kritik noktası asimptotik kararlıdır.

Teorem 2. Aşağıdaki özelliklere sahip bir $V(x,y)$ fonksiyonu var ise, bu durumda (1) sisteminin $(0,0)$ kritik noktası kararsızdır:

(i) $V(x,y)$ fonksiyonu orijini kapsayan bir bölgede sürekli ve birinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahiptir.

(ii) $V(0,0)=0$.

(iii) $(0,0)$ merkezli her çember $V(x,y)$ nin pozitif olduğu en az bir nokta kapsar.

(iv) $\dfrac{\partial V}{\partial x}F + \dfrac{\partial V}{\partial y}G$ fonksiyonu pozitif definittir.

Örnek 2.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2xy \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x^2 - y^3 \end{cases} \tag{4}$$

sisteminin $(0,0)$ kritik noktasının kararlılığını inceleyiniz.

Çözüm.

$$V(x,y) = x^2 + 2y^2$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Açık olarak görülmektedir ki $V(x,y)$ sürekli ve sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyondur. $V(0,0)=0$ dır. Ayrıca $V(x,y)$ pozitif definittir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= -4y^4\end{aligned}$$

olup $\frac{\partial V}{\partial x}F+\frac{\partial V}{\partial y}G$ fonksiyonu negatif yarı definittir. Buna göre Teorem 1 den (4) sisteminin $(0,0)$ kritik noktası kararlıdır.