2.5. Lokal Eğrisel Bağlantılı Topolojik Uzaylar-2

Teorem 2.5.2. Lokal eğrisel bağlantılılık topolojik bir özelliktir.

İspat: (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir homeomorfizm olsun. X lokal eğrisel bağlantılı olduğunda, Y nin lokal eğrisel bağlantılı olacağı Teorem 2.5.1 in ispatına benzer şekilde gösterilebilir. Y nin lokal eğrisel bağlantılı olduğunu kabul edelim. $x \in X$ olsun ve herhangi bir $V \in \mathcal{V}_{(x)}$ alalım. Bu durumda, $f(x) \in f(V) \in \mathcal{V}_{(f(x))}$ olur. Y lokal eğrisel bağlantılı olduğundan, $U \subset f(V)$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{V}_{(f(x))}$ vardır öyle ki (U, τ'_U) eğrisel bağlantılıdır. Diğer yandan,

$$f^{-1}(U) \subset f^{-1}(f(V)) \subset X$$

olur ve f birebir olduğundan $f^{-1}(U) \subset V$ elde edilir. $g = f^{-1}$ fonksiyonu mevcut ve sürekli olduğundan $g(U)$, X den indirgenen yapısıyla eğrisel bağlantılıdır. Eğrisel bağlantılılık topolojik özellik olduğundan $g(U)$, V den indirgenen yapısıyla da eğrisel bağlantılıdır. Son olarak, f sürekli olduğundan $g(U) = f^{-1}(U) \in \mathcal{V}_{(x)}$ dir. O halde, X lokal eğrisel bağlantılıdır.

Teorem 2.5.3. (X_1, τ_1) ve (X_2, τ_2) iki topolojik uzay olsun ve $X = X_1 \times X_2$ kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 topolojileri yardımıyla tanımlanan çarpım topolojik yapısı $\mathfrak{S}$ ile gösterilsin. Bu durumda, aşağıdaki önermeler denktirler.

(i) $(X, \mathfrak{S})$ çarpım topolojik uzayı lokal eğrisel bağlantılıdır,

(ii) (X_1, τ_1) ve (X_2, τ_2) topolojik uzayları lokal eğrisel bağlantılıdır.

İspat: $i \Rightarrow ii$ İzdüşüm fonksiyonları sürekli, örten ve açık fonksiyonlar olduğundan ispat açıktır.

$ii \Rightarrow i$ Herhangi bir $x = (x_1, x_2) \in X$ alalım. $\forall W \in \mathcal{V}_{(x)}$ için

$$U \times V \subset W$$

olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{V}_{(x_1)}$ ve $\exists V \in \mathcal{V}_{(x_2)}$ vardır. Diğer yandan, X_1 lokal eğrisel bağlantılı olduğundan, $G \subset U$ olacak biçimde $\exists G \in \mathcal{V}_{(x_1)}$ komşuluğu vardır öyle ki $(G, (\tau_1)_G)$ eğrisel bağlantılıdır. Benzer şekilde, X_2 lokal eğrisel bağlantılı olduğundan, $H \subset V$ olacak biçimde $\exists H \in \mathcal{V}_{(x_2)}$ komşuluğu vardır öyle ki $(H, (\tau_2)_H)$ eğrisel bağlantılıdır. Eğrisel bağlantılı iki uzayın kartezyen çarpımı da eğrisel bağlantılı olduğundan,

$$(M = G \times H, (\tau_1)_G \times (\tau_2)_H)$$

eğrisel bağlantılıdır. Ayrıca

$$\mathfrak{S}_{G \times H} \subset (\tau_1)_G \times (\tau_2)_H$$

olduğundan, $(M, \mathfrak{S}_M)$ yapısıyla da bağlantılıdır. Ayrıca $M \in \mathcal{V}_{(x)}$ ve $M \subset W$ olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.5.4. (X, τ) lokal eğrisel bağlantılı bir topolojik uzay olsun. Aşağıda verilen önermeler doğrudur.

(I) X bağlantılı ise, eğrisel bağlantılıdır.

(II) X bağlantısız ise, $\forall x \in X$ noktasının C_x bağlantılı bileşeni, hem açık hem kapalı bir kümedir ve (C_x, τ_{C_x}) eğrisel bağlantılıdır.

İspat: (I) Herhangi bir $x \in X$ alalım, $x \neq y$ koşulunu sağlayan ve x ile arasında bir eğri bulunan tüm $y \in X$ noktalarının oluşturduğu kümeyi E_x ile gösterelim. Eğrisel bağlantılılık geçişmeli bir özellik olduğundan, E_x eğrisel bağlantılıdır. O halde, E_x bağlantılıdır. Diğer yandan; $\forall y \in E_x \subset X$ alınırsa, X lokal eğrisel bağlantılı olduğundan, $\forall V \in \mathcal{V}_{(y)}$ için $U \subset V$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{V}_{(y)}$ vardır öyle ki (U, τ_U) eğrisel bağlantılıdır. Dolayısıyla,

$$U \subset E_x$$

dir. Böylece $E_x \in \tau$ olduğu görülür. Şimdi, herhangi bir $z \in X - E_x$ alalım. Bu durumda, $z \notin E_x$ dir, yani z noktasını x noktasına bağlayan bir eğri yoktur. Diğer yandan; $z \in X$ ve X lokal eğrisel bağlantılı olduğundan, $\forall V \in \mathcal{V}_{(z)}$ için $G \subset V$ olacak biçimde $\exists G \in \mathcal{V}_{(z)}$ vardır öyle ki (G, τ_G) eğrisel bağlantılıdır. Dolayısıyla,

$$G \subset X - E_x$$

olur, buradan $E_x \in \mathcal{F}$ elde edilir. X bağlantılı ve $E_x \neq \emptyset$ olduğundan $E_x = X$

olmak zorundadır.

(II) Herhangi bir $x \in X$ alalım, $x \neq y$ koşulunu sağlayan ve x ile arasında bir eğri bulunan tüm $y \in X$ noktalarının oluşturduğu kümeyi E_x ile gösterelim. (I) için verilen ispatta E_x kümesinin hem açık hem kapalı olduğu ve eğrisel bağlantılı olduğu gösterilmişti. O halde, E_x bağlantılıdır. Buradan

$$E_x \subset C_x \subset X$$

olur. Diğer yandan; $E_x = E_x \cap C_x$ olduğuna göre, E_x kümesi (C_x, τ_{C_x}) alt uzayının da hem açık hem kapalı bir alt kümesidir. C_x bağlantılı olduğundan $E_x = C_x$ olmak zorundadır. O halde, C_x hem açık hem kapalı olup eğrisel bağlantılıdır.

Sonuç 2.5.1. $\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ..., \mathbb{R}^n$) alışılmış topolojik yapısı ile ele alınsın. $\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ..., \mathbb{R}^n$) nin bağlantılı her alt kümesi, eğrisel bağlantılıdır.