Tahmin Edici Bulma Yöntemleri I

1 Momentler Tahmin Edicisi

Bu yöntemde kitle momentlerinin örneklem momentlerine eşitlenmesi ile oluşturan denklemlerin çözümü ile parametrelerin tahminine ulaşılır. $X_1, X_2, ..., X_n$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x, \vec{\theta})$ olan kitleden bir örneklem olsun. θ parametrelerinin momentler yöntemi tahmin edicileri aşağıdaki sistemin çözümü ile elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\
\mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&. \\
\mathbb{E}(X^n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^n
\end{aligned}$$

Örnek 1 $X_1, X_2, ..., X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{d.y.} \end{cases}$$

olan dağılımdan bir örneklem olmak üzere θ parametresinin momentler tahmin edicisini bulunuz.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x\theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^{\theta} dx = \theta \left(\left. \frac{x^{\theta+1}}{\theta+1} \right|_0^1 \right) = \theta \left(\frac{1}{\theta+1} - 0 \right) = \frac{\theta}{\theta+1}$$

$\overline{X_n}$ örneklem ortalaması olmak üzere

$$\frac{\theta}{\theta+1} = \overline{X_n} \rightarrow \theta = \overline{X_n}\theta + \overline{X_n} \rightarrow \theta(1-\overline{X_n}) = \overline{X_n} \rightarrow \hat{\theta} = \frac{\overline{X_n}}{1-\overline{X_n}}.$$

Örnek 2 $X_1, X_2, ..., X_n \sim$ Üstel(θ) dağılımından alınmış bir örneklem olmak üzere θ parametresinin momentler tahmin edicisini bulunuz.

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty x f(x;\theta)dx = \int_0^\infty x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty xe^{-\frac{x}{\theta}}dx \\ &= -xe^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\theta}}dx = -\theta e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^\infty = 0-(-\theta) = \theta\end{aligned}$$

$\overline{X_n}$ örneklem ortalaması olmak üzere

$$\hat{\theta} = \overline{X_n}$$

Örnek 3 $X_1, X_2, ..., X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\theta) = \frac{3x^2}{\theta^3}$$

$0 \leqslant x \leqslant \theta$ olan dağılımından bir örneklem olmak üzere θ parametresinin momenetler tahmin edicisini bulunuz.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\theta \frac{x3x^2}{\theta^3}dx = \frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x^3dx = \frac{3}{\theta^3}\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^\theta\right) = \frac{3}{\theta^3}\frac{\theta^4}{4} = \frac{3\theta}{4}$$

$\overline{X_n}$ örneklem ortalaması olmak üzere

$$\frac{3\theta}{4} = \overline{X_n} \rightarrow \hat{\theta} = \frac{4}{3}\overline{X_n}.$$

Örnek 4 $X_1, X_2, ..., X_n \sim U(\alpha, \beta)$ dağılımından alınmış bir örneklem olmak üzere α ve β parametrelerinin momentler tahmin edicilerini bulunuz.

$X \sim U(\alpha, \beta)$ olmak üzere $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}$ ve $V(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$ olduğu açıktır. Burdan X'in ikinci momenti

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= V(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \frac{(\beta-\alpha)^2}{12} + \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2}{12} + \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{4} \\
&= \frac{\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2 + 3\alpha^2 + 6\alpha\beta + 3\beta^2}{12} = \frac{4\beta^2 + 4\alpha\beta 4\alpha^2}{12} \\
&= \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Kitle ve örneklem momentlerini birbirine eşitlersek

$$\overline{X}_n = \frac{\alpha+\beta}{2} \rightarrow \hat{\alpha} = 2\overline{X}_n - \beta.$$

ve

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

burada $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ ye M_2 dersek

$$\begin{aligned}
3M_2 &= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \\
&= (2\overline{X}_n - \beta)^2 + (2\overline{X}_n - \beta)\beta + \beta^2 \\
&= 4\overline{X}_n^{\,2} - 4\overline{X}_n\beta + \beta^2 + 2\overline{X}_n\beta - \beta^2 + \beta^2 \\
&= 4\overline{X}_n^{\,2} - 2\overline{X}_n\beta + \beta^2 \\
&= 3\overline{X}_n^{\,2} + \overline{X}_n^{\,2} - 2\overline{X}_n\beta + \beta^2
\end{aligned}$$

$$3(M_2 - \overline{X}_n^{\,2}) = (\overline{X}_n - \beta)^2 \rightarrow -\sqrt{3(M_2 - \overline{X}_n^{\,2})} = \overline{X}_n - \beta \rightarrow \hat{\beta} = \overline{X}_n + \sqrt{3(M_2 - \overline{X}_n^{\,2})}$$

ve $\hat{\beta}$ α'nın momentler tahmin edicisinde yerine konulursa

$$\hat{\alpha} = \overline{X}_n - \sqrt{3(M_2 - \overline{X}_n^{\,2})}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 5 $X_1, X_2, ..., X_n \sim$ Gamma(α, β) dağılımından bir örneklem olmak üzere α ve β parametrelerinin momentler tahmin edicilerini bulunuz.

$X \sim$ Gamma(α, β) olmak üzere $\mathbb{E}(X) = \alpha\beta$ ve $V(X) = \alpha\beta^2$ dır. Burdan

$$\mathbb{E}(X^2) = \alpha\beta(\beta + \alpha\beta),$$

olduğu açıktır. Birinci momentleri birbirine eşitlersek,

$$\mathbb{E}(X) = \alpha\beta = \overline{X}_n \rightarrow \overline{X}_n = \alpha\beta$$

elde edilir. İkinci momentlerin birbirine eşitlenmesi ile de

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 &= \alpha\beta(\beta + \alpha\beta) \\
&= \overline{X}_n(\beta + \overline{X}_n) \rightarrow \beta + \overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}{n\overline{X}_n} \\
&\rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - n{\overline{X}_n}^2}{n\overline{X}_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}{n\overline{X}_n}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\hat{\beta}$ kullanılarak α'nın tahmin edicisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\hat{\alpha} = \frac{\overline{X}_n}{\beta} = \frac{\overline{X}_n}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}{n\overline{X}_n}} = \frac{n{\overline{X}_n}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}$$