Düzlem Elektromanyetik Dalgalar

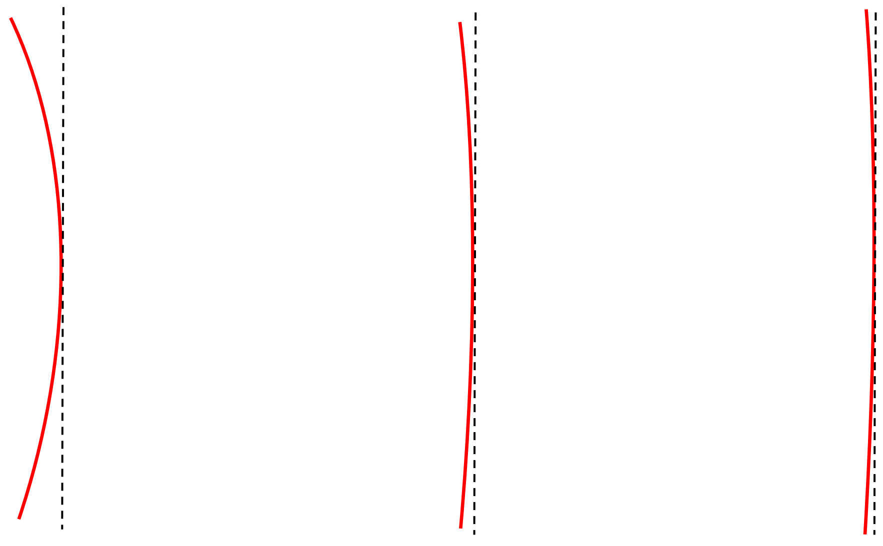
Dalga Cephesi: Bir dalganın veya dalga katarının, dışarıdan bakan gözlemci tarafından gözlemlenen geometrik şekli.

Örneğin, durgun suya (bir havuz veya göle) atılan bir taşı düşünelim. Bu taş, daire şeklinde bir dalgaya sebep olacaktır. Bir başka deyişle, oluşan dalganın dalga cephesi çember olacaktır.

Önemli Not: Dalga cephesi üzerindeki her noktada, dalga denklemini sağlayan fonksiyon eşit değer alır.

Temel fikir:

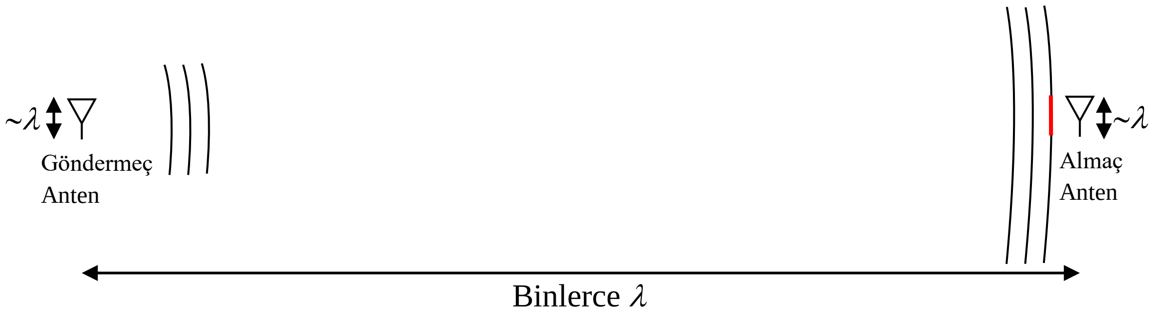
- 2 Boyutta: Sonsuz büyüklükte bir çemberden koparılmış bir yay, bir doğru parçasıdır. Dolayısıyla, çok çok büyük bir çemberden koparılacak küçük bir yay, yaklaşık olarak bir doğru parçası olarak kabul edilebilir.
- 3 Boyutta: Sonsuz büyüklükte bir kürenin yüzeyinden koparılmış bir parça, bir düzlem parçasıdır. Dolayısıyla, çok çok büyük bir kürenin yüzeyinden koparılacak küçük bir parça, yaklaşık olarak bir düzlem parçası olarak kabul edilebilir.



Elektronik mühendisliğinde, özellikle kablosuz iletişim uygulamalarında, kaynaklardan binlerce dalga boyu ötedeki alan değerleri incelenir. Kaynağımız olan antenler, çok uzaktan bakıldığında noktasal birer dalga kaynağı olarak kabul edilebilir.

2 Boyutta, noktasal bir dalga kaynağının oluşturduğu dalgalar “dairesel” dalgalardır. Bir başka deyişle, 2 Boyutta, noktasal bir dalga kaynağının oluşturduğu dalgaların dalga cepheleri birer dairedir.

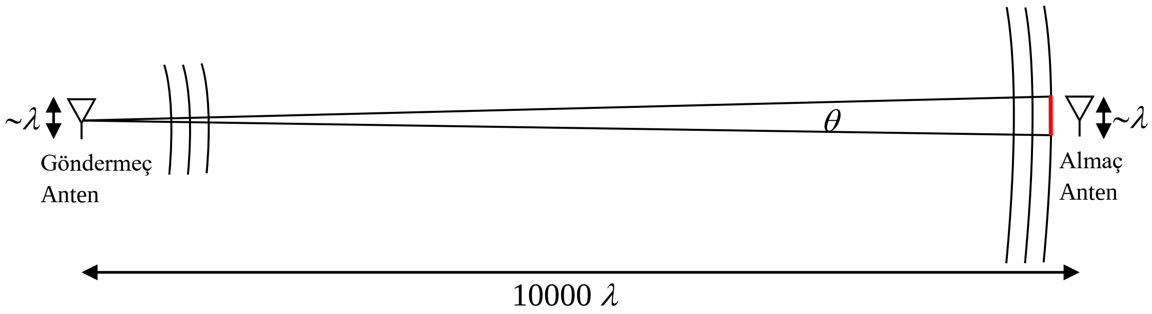
3 Boyutta, noktasal bir dalga kaynağının oluşturduğu dalgalar “küresel” dalgalardır. Bir başka deyişle, 3 Boyutta, noktasal bir dalga kaynağının oluşturduğu dalgaların dalga cepheleri birer küredir.



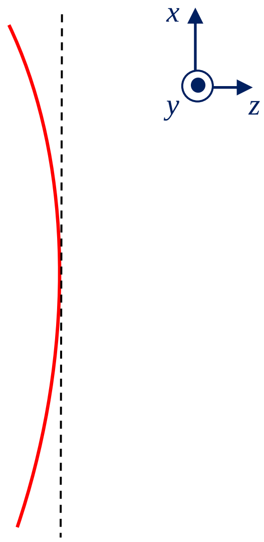
Örneğin, 100MHz'te yayın yapan bir FM radyo vericisinin ürettiği dalga, arada herhangi bir tekrarlayıcı/yükseltici olmaksızın tipik olarak 40-50 km. menzile sahiptir. Böyle bir örnek için, 30 km. mesafedeki bir alıcı anteni ele alalım. 100MHz'te dalga boyu

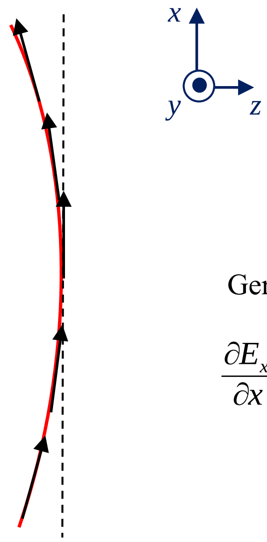
$\lambda f = c \;\Rightarrow\; \lambda\, 100.10^6 = 3.10^8 \;\Rightarrow\; \lambda = 3$m. olarak bulunur.

Bu durumda, göndermeç-almaç arasındaki mesafe 10000λ olur. Alıcı antenin boyunun yaklaşık 1λ olduğu düşünülürse, incelenecek parça çok çok küçük bir açı tarafından taranan bir parça olacaktır.



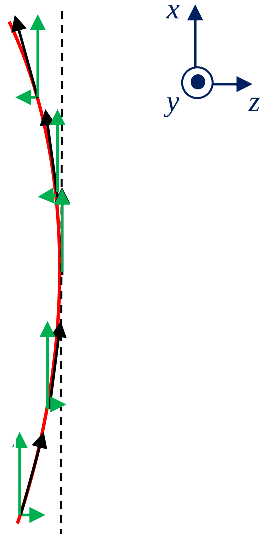
Radyan cinsinden $\theta = \lambda / 10000\lambda = 10^{-4}$ değerine sahip olacaktır. 2π radyan, 360°'ye eşit olduğundan, $\theta = 5{,}73.10^{-3\circ} = 0{,}00573°$ olacaktır. Bu da, pratikte incelenen parçanın ne kadar küçük bir açı tarafından taranmakta olduğuna dair bir fikir vermektedir.



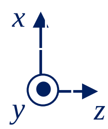


Gerçek Durum:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} \neq 0; E_z \neq 0$$



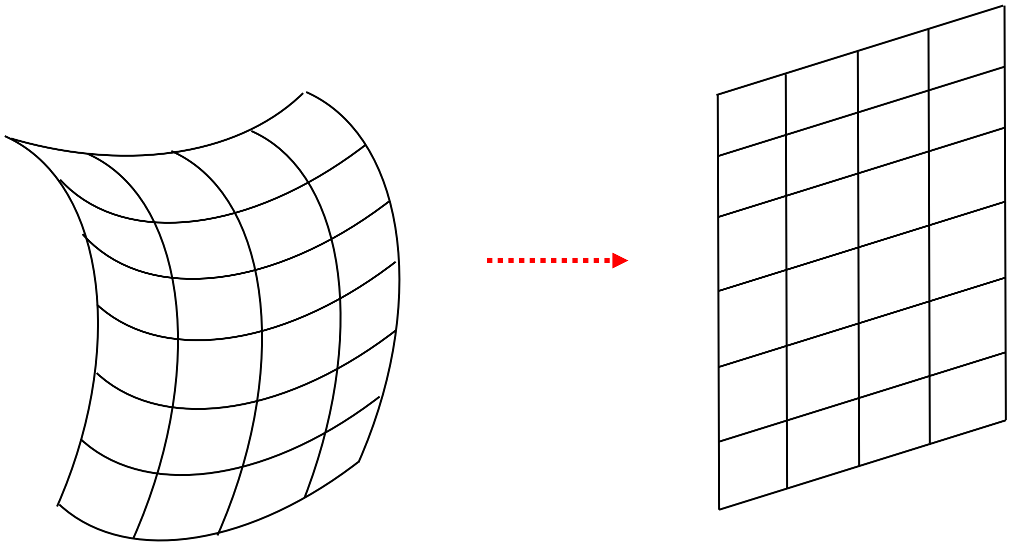
Düzlem Dalga Varsayımı



z: yayılım yönü

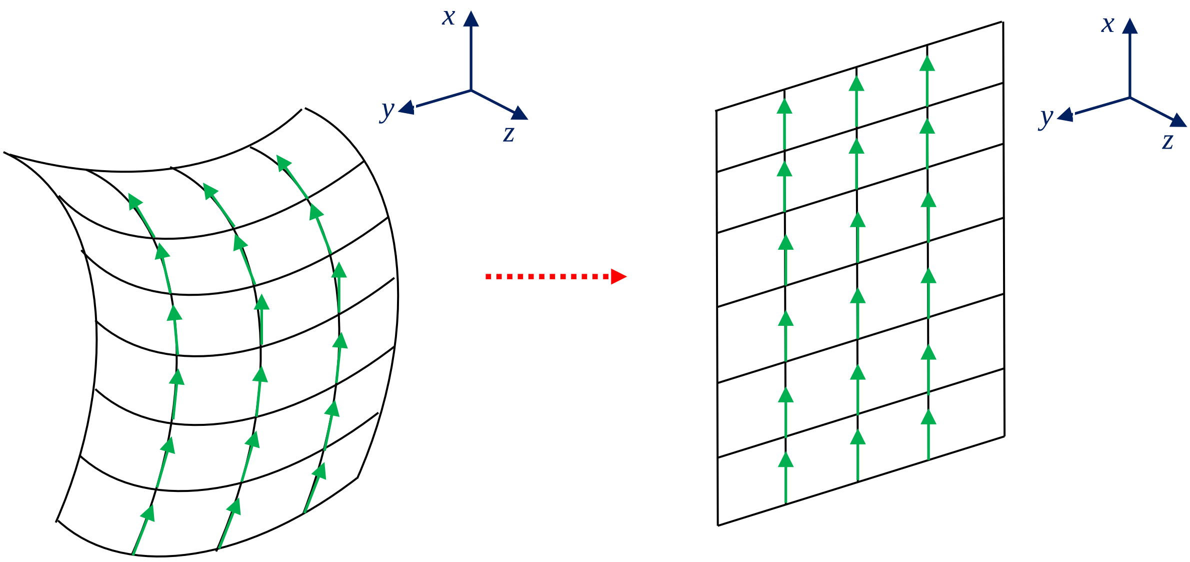
xy-düzlemi: “transvers” düzlem

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0; E_z = 0$$



Küresel bir dalga için
Gerçek Dalga Cephesi

Düzlem Dalga yaklaşımı ile
“Varsayılan ”Dalga Cephesi



z: yayılım yönü

z: yayılım yönü

xy-düzlemi: “transvers” düzlem

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} \neq 0; \frac{\partial E_x}{\partial y} \neq 0;$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial y} \neq 0; \frac{\partial E_y}{\partial x} \neq 0;$$
$$E_z \neq 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0; \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0;$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0; \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0;$$
$$E_z = 0$$

Dalga Cephesi'nin tanımı gereği, alan değeri bu yüzey üzerinde sabit olmak zorundadır. Yukarıdaki şekilde, sol taraftaki yüzey üzerine çizilen eşit uzunluktaki vektörlerin her bir farklı yönde olacağından, her birinin *x, y, z* bileşenleri de farklı uzunlukta olacaktır.

Ancak, dalga cephesinin şekline sağ tarafındaki gibi düzlem şeklinde olduğu varsayılırsa, yüzey üzerinde çizilen eşit uzunluktaki vektörlerin:

- hepsi aynı yönde olacaktır; dolayısıyla her birinin bileşenleri de birbirine eşit olacaktır.
- hiçbirinin düzleme dik olan yönde herhangi bir bileşeni olmayacaktır.

Yani;

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0; \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0;$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0; \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0;$$
$$E_z = 0$$

olacaktır. Bu durumda:

$$\overline{\nabla}^2 E_x(x,y,z) + k^2 E_x(x,y,z) = 0$$
$$\overline{\nabla}^2 E_y(x,y,z) + k^2 E_y(x,y,z) = 0$$
$$\overline{\nabla}^2 E_z(x,y,z) + k^2 E_z(x,y,z) = 0$$

denklemlerini ele alırsak; örneğin ilk denklem:

$$\frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial z^2} + k^2 E_x(x,y,z) = 0;$$
$$\frac{\partial (E_x(x,y,z))}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial x^2} = 0;$$
$$\frac{\partial (E_x(x,y,z))}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial y^2} = 0;$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 (E_x(z))}{dz^2} + k^2 E_x(z) = 0$$

şeklinde sadeleşecektir. Bu denklemin çözümü:

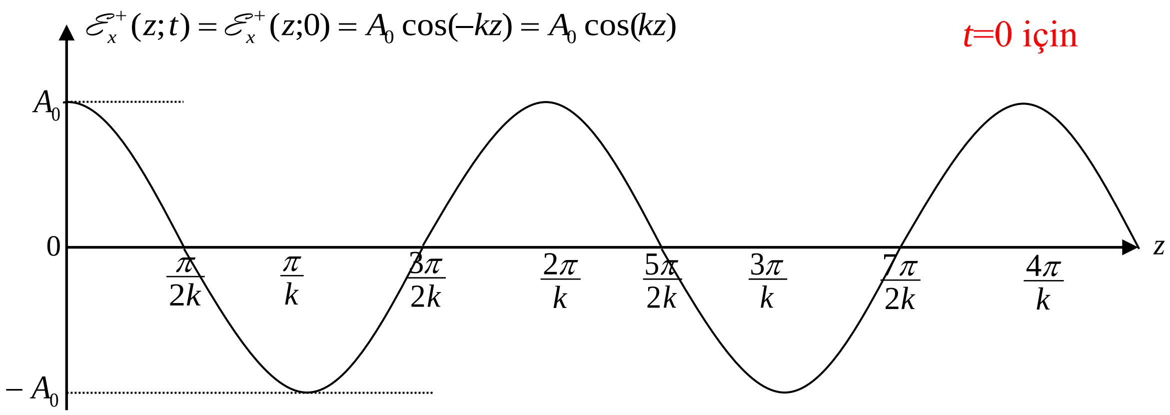
$$E_x(z) = E_x^+(z) + E_x^-(z) = A_0 e^{-jkz} + B_0 e^{+jkz}$$

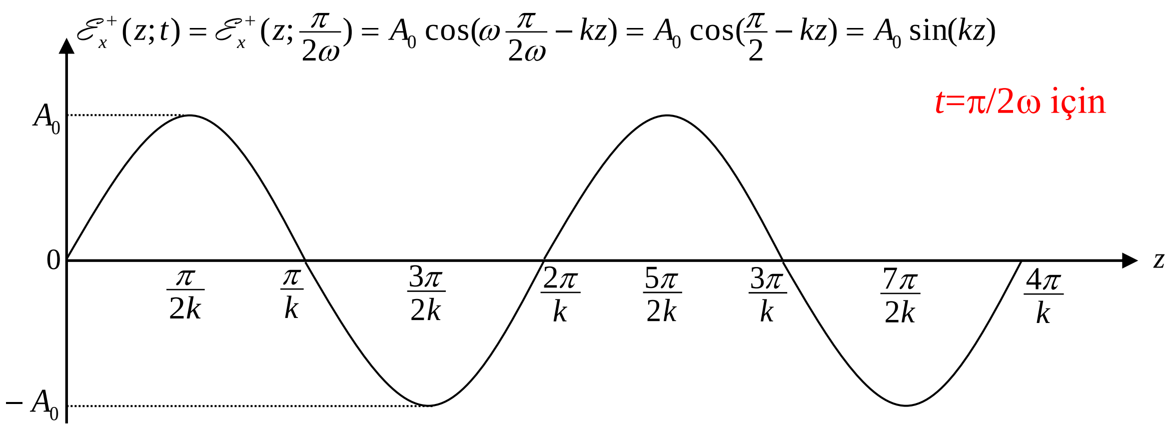
olarak yazılabilir.

Öncelikle, ilk terimi ele alalım:

$$E_x^+(z) = A_0 e^{-jkz}$$

$$\Rightarrow \mathscr{E}_x^+(z;t) = \mathrm{Re}\{E_x^+(z)e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{A_0 e^{-jkz} e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{A_0 e^{j(\omega t - kz)}\} = A_0 \cos(\omega t - kz)$$





Dalganın +z yönünde yayılmakta olduğu görülmektedir. Dolayısıyla:

- zaman domain'inde cos $(\omega t - kz)$'lı,
- fazör gösterimde ise e^{-jkz}'li

terim içeren bir fonksiyon; +z yönünde yayılmakta olan bir dalgadır.

Benzer şekilde:

- zaman domain'inde cos $(\omega t + kz)$'lı,
- fazör gösterimde ise e^{+jkz}'li

terim içeren bir fonksiyonun da; –z yönünde yayılmakta olan bir dalga olduğu gösterilebilir.

Dalganın hızı:

$$u_p = \frac{\pi/2k}{\pi/2\omega} = \frac{\pi}{2k}\frac{2\omega}{\pi} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

olarak bulunur. Dalganın yayılım hızının ω/k'ya eşit olduğu, cos $(\omega t - kz)$ teriminin sabit olmasından da gösterilebilir. cos $(\omega t - kz)$ sabit ise, $(\omega t - kz)$ sabit faz terimidir. Bu durumda:

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

olarak yazılabilir. Dalganın boşlukta/uzayda yayılıyor olması durumunda:

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}};$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9} \quad \text{(F/m)};$$

$$\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7} \quad \text{(H/m)};$$

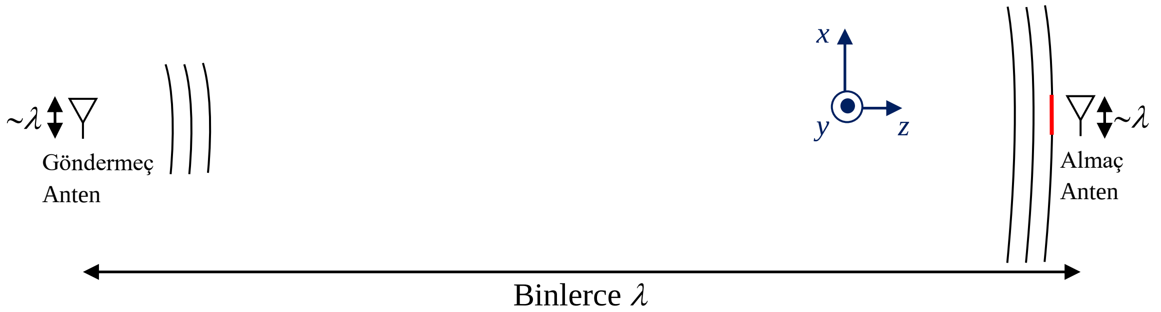
$$\Rightarrow u_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}\times 4\pi\times 10^{-7}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}\times 10^{-16}}} = \frac{1}{\frac{1}{3}\times 10^{-8}} = 3\times 10^{8} \ \text{(m/s)} = c$$

olarak bulunur. Bir başka deyişle, elektromanyetik dalgalar boşlukta/uzayda, ışık hızı ile yayılır!...

Problemimize dönecek olursa eğer; denklemimizin çözümünü olarak bulmuştuk.

$$E_x(z) = E_x^+(z) + E_x^-(z) = A_0 e^{-jkz} + B_0 e^{+jkz}$$

Matematiksel çözümün ilk teriminin +z, ikinci teriminin de artık –z yönünde yayılan dalga olduğunu biliyoruz. Şekilde de görüleceği üzere, almaç antenin z konumunun göndermeç antenin z konumundan daha büyük olduğu durumda, ikinci terim (yani –z yönünde yayılan dalga) matematiksel olarak anlamlı olmasına rağmen fiziksel olarak anlamlı değildir.



Dolayısıyla elektrik alanın x bileşeni için dalga denkleminin çözümü, düzlem dalga varsayımıyla:

$$E_x(z) = E_x^+(z) = A_0 e^{-jkz}$$

veya,

$$\mathscr{E}_x(z;t) = \mathscr{E}_x^+(z;t) = \mathrm{Re}\{E_x^+(z)e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{A_0 e^{-jkz}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{A_0 e^{j(\omega t - kz)}\} = A_0\cos(\omega t - kz)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde, elektrik alanın y bileşeni için dalga denkleminin çözümünün de, düzlem dalga varsayımıyla:

$$\frac{\partial^2(E_y(x,y,z))}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(E_y(x,y,z))}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(E_y(x,y,z))}{\partial z^2}+k^2E_y(x,y,z)=0;$$

$$\frac{\partial(E_y(x,y,z))}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial^2(E_y(x,y,z))}{\partial x^2}=0;$$

$$\frac{\partial(E_y(x,y,z))}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial^2(E_y(x,y,z))}{\partial y^2}=0;$$

$$\Rightarrow\frac{d^2(E_y(z))}{dz^2}+k^2E_y(z)=0$$

$$E_y(z)=E_y^+(z)+E_y^-(z)=C_0e^{-jkz}+D_0e^{+jkz}$$

$$E_y(z)=E_y^+(z)=C_0e^{-jkz}$$

veya,

$$\mathscr{E}_y(z;t)=\mathscr{E}_y^+(z;t)=\mathrm{Re}\{E_y^+(z)e^{j\omega t}\}=\mathrm{Re}\{C_0e^{-jkz}e^{j\omega t}\}=\mathrm{Re}\{C_0e^{j(\omega t-kz)}\}=C_0\cos(\omega t-kz)$$

formunda olduğu gösterilebilir.

Öte yandan, düzlem dalga varsayımıyla, z yönünde yayılan elektrik alanın z bileşeninin 0 olarak kabul edilir. Bir başka deyişle E_z= 0,

$$\frac{\partial^2(E_z(x,y,z))}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(E_z(x,y,z))}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(E_z(x,y,z))}{\partial z^2}+k^2E_z(x,y,z)=0$$

denkleminin aşikar çözümüdür.

Özetlemek gerekirse, z yönünde yayılan elektromanyetik dalga için elektrik alan:

$$\begin{aligned}\bar{\mathscr{E}}(x,y,z;t)&=\hat{a}_x\mathscr{E}_x(x,y,z;t)+\hat{a}_y\mathscr{E}_y(x,y,z;t)+\hat{a}_z\mathscr{E}_z(x,y,z;t)\\&=\hat{a}_x\mathscr{E}_x^+(z;t)+\hat{a}_y\mathscr{E}_y^+(z;t)+\hat{a}_z0\\&=\hat{a}_xA_0\cos(\omega t-kz)+\hat{a}_yC_0\cos(\omega t-kz)\end{aligned}$$

formundadır.

Manyetik alan da aynı dalga denklemini sağladığı için, z yönünde yayılan elektromanyetik dalga için manyetik alan benzer şekilde:

$$\overline{\mathscr{H}}(x,y,z;t) = \hat{a}_x\mathscr{H}_x(x,y,z;t) + \hat{a}_y\mathscr{H}_y(x,y,z;t) + \hat{a}_z\mathscr{H}_z(x,y,z;t)$$
$$= \hat{a}_x\mathscr{H}_x^+(z;t) + \hat{a}_y\mathscr{H}_y^+(z;t) + \hat{a}_z 0$$
$$= \hat{a}_x R_0 \cos(\omega t - kz) + \hat{a}_y S_0 \cos(\omega t - kz)$$

formunda olacaktır.

Faraday Yasası (fazör gösterimde):

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = -j\omega\overline{B}$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j\omega\overline{B}$$

z yönünde yayılan bir dalga için düzlem dalga varsayımı yaptığımızda:

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -j\omega\overline{B}$$

Örnek 1

Örneğin, elektrik alanın sadece *x* bileşeninin olması durumunda:

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -j\omega\mu\overline{H}$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = \hat{a}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu\overline{H}$$
$$\Rightarrow \overline{H} = \hat{a}_y H_y^+(z) = \hat{a}_y \frac{k}{\omega\mu} E_x^+(z)$$
$$\frac{1}{\eta} = \frac{k}{\omega\mu} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\omega\mu} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\mu} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$
$$\Rightarrow \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$
$$\Rightarrow \overline{H} = \hat{a}_y H_y^+(z) = \hat{a}_y \frac{1}{\eta} E_x^+(z)$$

Örnek 2

Örneğin, elektrik alanın sadece *y* bileşeninin olması durumunda:

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -j\omega\mu\overline{H}$$

Elektrik alan ile manyetik alan, transvers düzlemde birbirlerine diktir!...

Genel olarak, düzlem dalga varsayımıyla:

$$\overline{H} = \frac{1}{\eta}\hat{a}_k \times \overline{E}$$