Kayıplı Ortamda Düzlem Elektromanyetik Dalgalar

$\sigma \rightarrow \infty \;\; \Rightarrow$ Mükemmel İletken

$\sigma = 0 \;\; \Rightarrow$ Kayıpsız Ortam

$\sigma \neq 0 \;\; \Rightarrow$ Kayıplı Ortam

Kayıpsız ortamda:

$$\overline{\nabla} \times \overline{H} = j\omega \overline{D} = j\omega\varepsilon \overline{E} \qquad \text{Amperé Yasası}$$

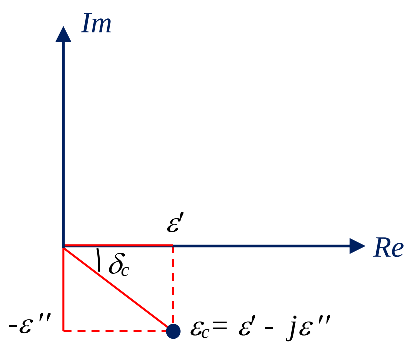
Kayıplı ortamda:

$$\overline{\nabla} \times \overline{H} = \overline{J} + j\omega \overline{D} \qquad \text{Amperé Yasası}$$
$$\overline{J} = \sigma \overline{E} \qquad \text{Ohm Yasası}$$

$$\Rightarrow \overline{\nabla} \times \overline{H} = \sigma \overline{E} + j\omega\varepsilon \overline{E} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\overline{E} = j\omega(\frac{\sigma}{j\omega} + \varepsilon)\overline{E}$$

$$= j\omega(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega})\overline{E} = j\omega(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega})\overline{E} = j\omega\varepsilon_c \overline{E}$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon' - j\varepsilon''$$
$$\varepsilon' = \varepsilon$$
$$\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega} \quad \text{veya} \quad \sigma = \omega\varepsilon''$$



$$\tan\delta_c = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega}.\frac{1}{\varepsilon'} \cong \frac{\sigma}{\omega}.\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \qquad \text{: Kayıp tanjantı}$$

δ_c : Kayıp Açısı (Ortamdaki Ohmik kayıpların ne kadar yüksek olduğuna dair bir ölçüttür)

$\sigma >> \omega\varepsilon \;\; \Rightarrow$ Ortam çok kayıplı; yani "iyi" iletken (Hatırlatma: $\sigma \rightarrow \infty \;\; \Rightarrow$ Mükemmel İletken)

$\sigma << \omega\varepsilon \;\; \Rightarrow$ Ortam az kayıplı; yani "iyi" yalıtkan (Hatırlatma: $\sigma = 0 \;\; \Rightarrow$ Kayıpsız Ortam)

Hatırlatma: Kayıpsız ortamda

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$
$$\overline{\nabla}^2 \overline{E} + k^2 \overline{E} = 0$$

$$k_c = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}$$
$$\overline{\nabla}^2 \overline{E} + k_c^2 \overline{E} = 0$$

$$\gamma = jk_c = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}$$
$$\overline{\nabla}^2 \overline{E} - \gamma^2 \overline{E} = 0$$

Örneğin, +z yönünde yayılan ve sadece E_x ile H_y bileşenleri olan bir dalga için

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = \gamma^2 E_x$$
$$E_x = E_0 e^{-\gamma z}$$

$$\gamma = jk_c = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} = \alpha + j\beta$$
$$E_x = E_0 e^{-\gamma z} = E_0 e^{-(\alpha + j\beta)z} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

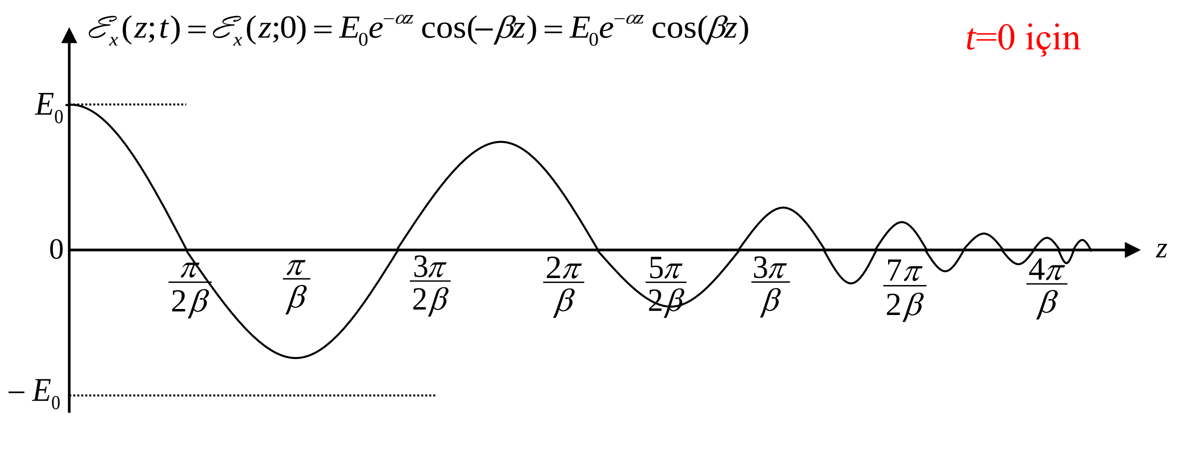
α: Sönümlenme Sabiti (Np/m)

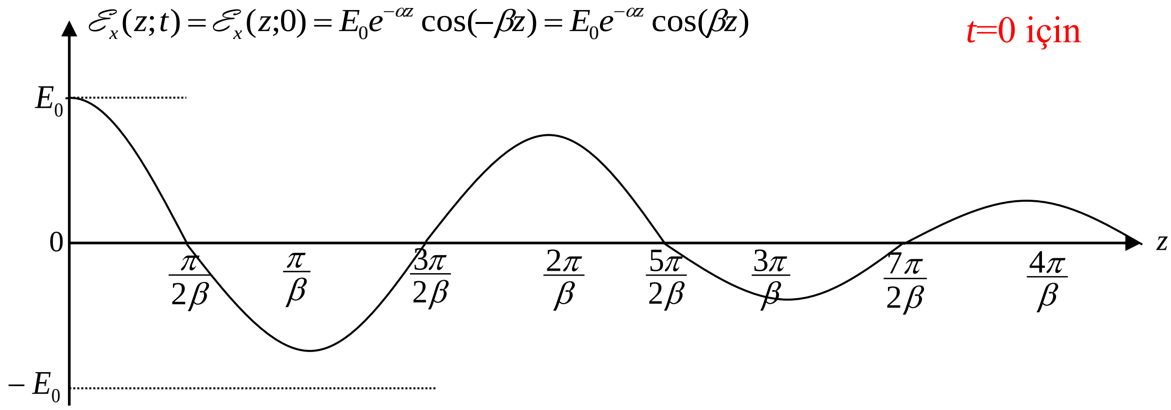
β: Faz Sabiti (rad/m)

γ: Yayılım Sabiti (1/m)

$e^{-\alpha z}$ teriminden de görüleceği üzere, z arttıkça dalgamız sönümlenir!...

$$E_x(z) = E_0 e^{-\gamma z} = E_0 e^{-(\alpha + j\beta)z} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$
$$\Rightarrow \mathscr{E}_x(z;t) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$





Düzlem dalga varsayımıyla:

$$\overline{H} = \frac{1}{\eta}\hat{a}_n \times \overline{E}$$

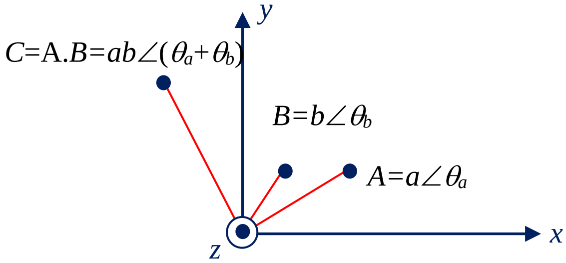
$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

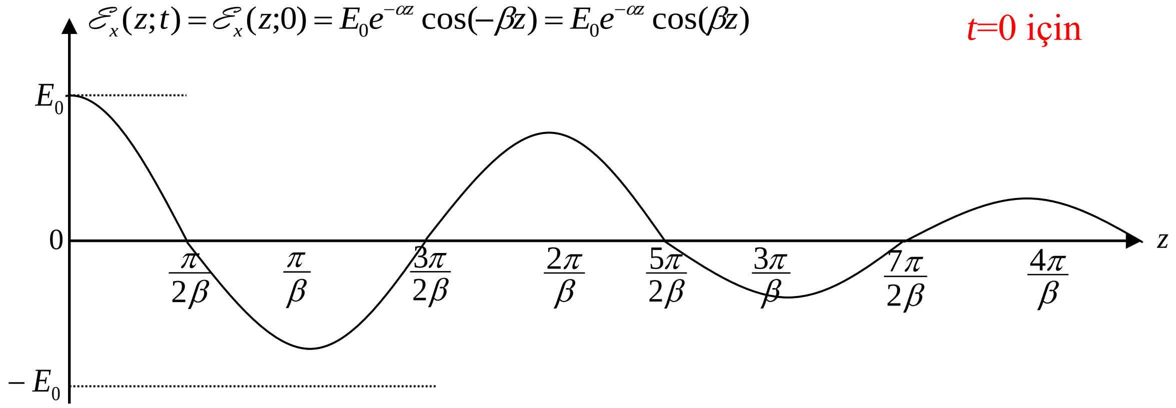
Kayıplı ortamda ise:

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}$$

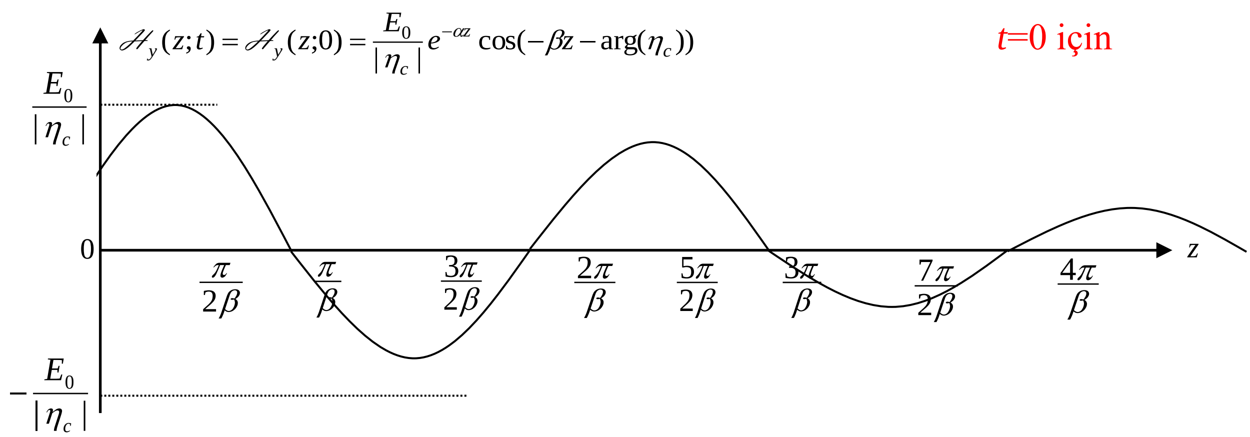
$$\overline{H} = \frac{1}{\eta_c}\hat{a}_n \times \overline{E}$$

Yani $\overline{E}$ ile $\overline{H}$ arasında, ortam empedansı (η_c)'nin argümanı kadar faz farkı oluşur.





$\mathscr{E}_x(z;t) = \mathscr{E}_x(z;0) = E_0 e^{-\alpha z}\cos(-\beta z) = E_0 e^{-\alpha z}\cos(\beta z)$
t=0 için
E_0
0
$-E_0$
z
$\frac{\pi}{2\beta}$
$\frac{\pi}{\beta}$
$\frac{3\pi}{2\beta}$
$\frac{2\pi}{\beta}$
$\frac{5\pi}{2\beta}$
$\frac{3\pi}{\beta}$
$\frac{7\pi}{2\beta}$
$\frac{4\pi}{\beta}$



$\mathscr{H}_y(z;t) = \mathscr{H}_y(z;0) = \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z}\cos(-\beta z - \arg(\eta_c))$
t=0 için
$\frac{E_0}{|\eta_c|}$
0
$-\frac{E_0}{|\eta_c|}$
z
$\frac{\pi}{2\beta}$
$\frac{\pi}{\beta}$
$\frac{3\pi}{2\beta}$
$\frac{2\pi}{\beta}$
$\frac{5\pi}{2\beta}$
$\frac{3\pi}{\beta}$
$\frac{7\pi}{2\beta}$
$\frac{4\pi}{\beta}$

Düşük Kayıplı Dielektrikler:

$\varepsilon'' << \varepsilon'$ veya $\sigma/\omega\varepsilon << 1$

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^{1/2} \cong j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\left(1 - j\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'} + \frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2\right)$$

$$\alpha = \mathrm{Re}(\gamma) \cong \frac{\omega\varepsilon'}{2}\left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\right)$$

$$\beta = \mathrm{Im}(\gamma) \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2\right]$$

- Sönümlenme sabiti, frekansla orantılıdır!...
- Faz sabiti, kayıpsız ortamdakine çok yakındır!...

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^{-1/2} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\left(1 + j\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}\right)$$

- Elektrik alan ve manyetik alan arasındaki faz farkı, çok azdır.

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \cong \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon'}}\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2\right]$$

Kayıplı ortamda elektromanyetik dalgalar, daha yavaş hareket eder!...
Düşük kayıplı dielektriklerde distorsiyon olur!...
Düşük kayıplı dielektriklerde dispersiyon olmaz!...

-
-

İyi İletkenler:

$\varepsilon'' >> \varepsilon'$ veya $\sigma/\omega\varepsilon >> 1$

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)^{1/2} \cong j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)^{1/2} = \sqrt{j}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma} = (1+j)\sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

$$\alpha = \mathrm{Re}(\gamma) \cong \sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

$$\beta = \mathrm{Im}(\gamma) \cong \sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

$$\eta_c \cong (1+j)\frac{\alpha}{\sigma}$$

- Elektrik alan ile manyetik alan arasındaki faz farkı, 45 derecedir.
- Sönümlenme faktörü, frekansla doğru orantılıdır; yüksek frekanslı dalgalar daha hızlı sönümlenir.
- İyi iletkenlerde, distorsiyon olur!..
- İyi iletkenlerde, dispersiyon da olur!...

Özetle:

İyi yalıtkanlar için:	İyi iletkenler için:
$\alpha \cong \frac{\omega\varepsilon''}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}$ (Np/m); $\beta \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2\right]$ (rad/m); $\eta_c \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}\left(1+j\,\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}\right)}$ (Ω)	$\alpha \cong \sqrt{\pi f\mu\sigma}$ (Np/m); $\beta \cong \sqrt{\pi f\mu\sigma}$ (rad/m); $\eta_c \cong (1+j)\frac{\alpha}{\sigma}$ (Ω)