805542 - 13. Hafta Ders Notları

HACİM DENKLİK TEOREMİ (VOLUME EQUIVALENCE THEOREM)

Amacımız, bir hacim kaplayan bir cismin, bulunduğu ortamda sebep olduğu (veya yansıttığı/saçtığı) alanları bulmak ise; eşlenik kaynaklar kullanmak etkili bir yöntem olabilir.

Hacim denklik teoreminin formülasyonunu türetmek için, öncelikle $(\bar{J}_i, \bar{M}_i)$ kaynaklarının boşlukta/uzayda $(\bar{E}_0, \bar{H}_0)$ alanına sebep olduğunu varsayalım. Bu alan ve kaynaklar, Maxwell denklemlerini sağlamak zorundadır. Yani:

$$\bar{\nabla} \times \bar{E}_0 = -\bar{M}_i - j\omega\mu_0 \bar{H}_0 \qquad (1a)$$
$$\bar{\nabla} \times \bar{H}_0 = \bar{J}_i + j\omega\epsilon_0 \bar{E}_0 \qquad (1b)$$

Aynı kaynaklar $(\bar{J}_i, \bar{M}_i)$; ϵ, μ ile betimlenen bir ortamda ışıma yaptıklarında $(\bar{E}, \bar{H})$ alanına sebep veriyor olsun. Bu durumda da Maxwell denklemleri sağlanacağından:

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\bar{M}_i - j\omega\mu \bar{H} \qquad (2a)$$
$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J}_i + j\omega\epsilon \bar{H} \qquad (2b)$$

(1a)'yı (2a)'dan; (1b)'yi de (2b)'den çıkarırsak

$$\bar{\nabla} \times (\bar{E} - \bar{E}_0) = -j\omega(\mu\bar{H} - \mu_0\bar{H}_0) \qquad (3a)$$
$$\bar{\nabla} \times (\bar{H} - \bar{H}_0) = j\omega(\epsilon\bar{E} - \epsilon_0\bar{E}_0) \qquad (3b)$$

elde edilir. $\bar{E}$ ve $\bar{E}_0$ (veya $\bar{H}$ ve $\bar{H}_0$) arasındaki farkı, "saçılan" alan olarak adlandırırsak:

$$\bar{E}^s = \bar{E} - \bar{E}_0 \Rightarrow \bar{E}_0 = \bar{E} - \bar{E}^s \qquad (4a)$$
$$\bar{H}^s = \bar{H} - \bar{H}_0 \Rightarrow \bar{H}_0 = \bar{H} - \bar{H}^s \qquad (4b)$$

(4a) ve (4b)'deki tanımlardan yola çıkarak

$$\overline{\nabla}\times\overline{E}^s = -j\omega\left[\mu\overline{H} - \mu_0(\overline{H}-\overline{H}^s)\right] = -j\omega(\mu-\mu_0)\overline{H} - j\omega\mu_0\overline{H}^s \quad (5a)$$
$$\overline{\nabla}\times\overline{H}^s = j\omega\left[\epsilon\overline{E} - \epsilon_0(\overline{E}-\overline{E}^s)\right] = j\omega(\epsilon-\epsilon_0)\overline{E} + j\omega\epsilon_0\overline{E}^s \quad (5b)$$

Eşlenik akım yoğunluklarını

$$\overline{J}_{eq} = j\omega(\epsilon-\epsilon_0)\overline{E} \quad (6a)$$
$$\overline{M}_{eq} = j\omega(\mu-\mu_0)\overline{H} \quad (6b)$$

olarak tanımlayabiliriz. Bu akım yoğunlukları, $\epsilon\neq\epsilon_0$ ve $\mu\neq\mu_0$ ortamında (yani "saçılan" alana sebep olan yansıtıcı cismin içerisinde) bulunur. Bu durumda (5a) ve (5b);

$$\overline{\nabla}\times\overline{E}^s = -\overline{M}_{eq} - j\omega\mu_0\overline{H}^s \quad (7a)$$
$$\overline{\nabla}\times\overline{H}^s = \overline{J}_{eq} + j\omega\epsilon_0\overline{E}^s \quad (7b)$$

şeklinde yazılabilir.

(7a) ve (7b)'nin yorumlanması : Bir yansıtıcının sebep olduğu "saçılan" alan, (6a) ve (6b)'de tanımlanmış olan eşlenik kaynaklar kullanılarak hesaplanabilir.

Ancak; her ne kadar problem basitleşmiş gibi gözükse de, (6a) ve (6b)'de eşlenik akım yoğunlukların hesaplanmasında $\overline{E}$ ve $\overline{H}$'ın biliniyor olması gerekmektedir. $\overline{E}$ ve $\overline{H}$, zaten bilinmeyen (bulmak istediğimiz) değerlerdir.

Dolayısıyla, Hacim Denklik Teoremi tek başına problem çözmek için yeterli değildir. Sadece, 805543 dersine konu olan Nümerik Yöntemlerle çözüm yaparken basit/sade formülasyon elde etmeye yarar.

YÜZEY DENKLİK TEOREMİ (SURFACE EQUIVALENCE THEOREM)

Hacim Denklik Teoremi, dielektrik yansıtıcı cisimler için kullanılmaktadır. İletken yansıtıcı cisimler için ise Yüzey Denklik Teoremi daha elverişlidir.

Yüzey Denklik Teoremi; Huygens'in Denklik Prensibi'ne dayanır.

Huygens'in Denklik Prensibi:

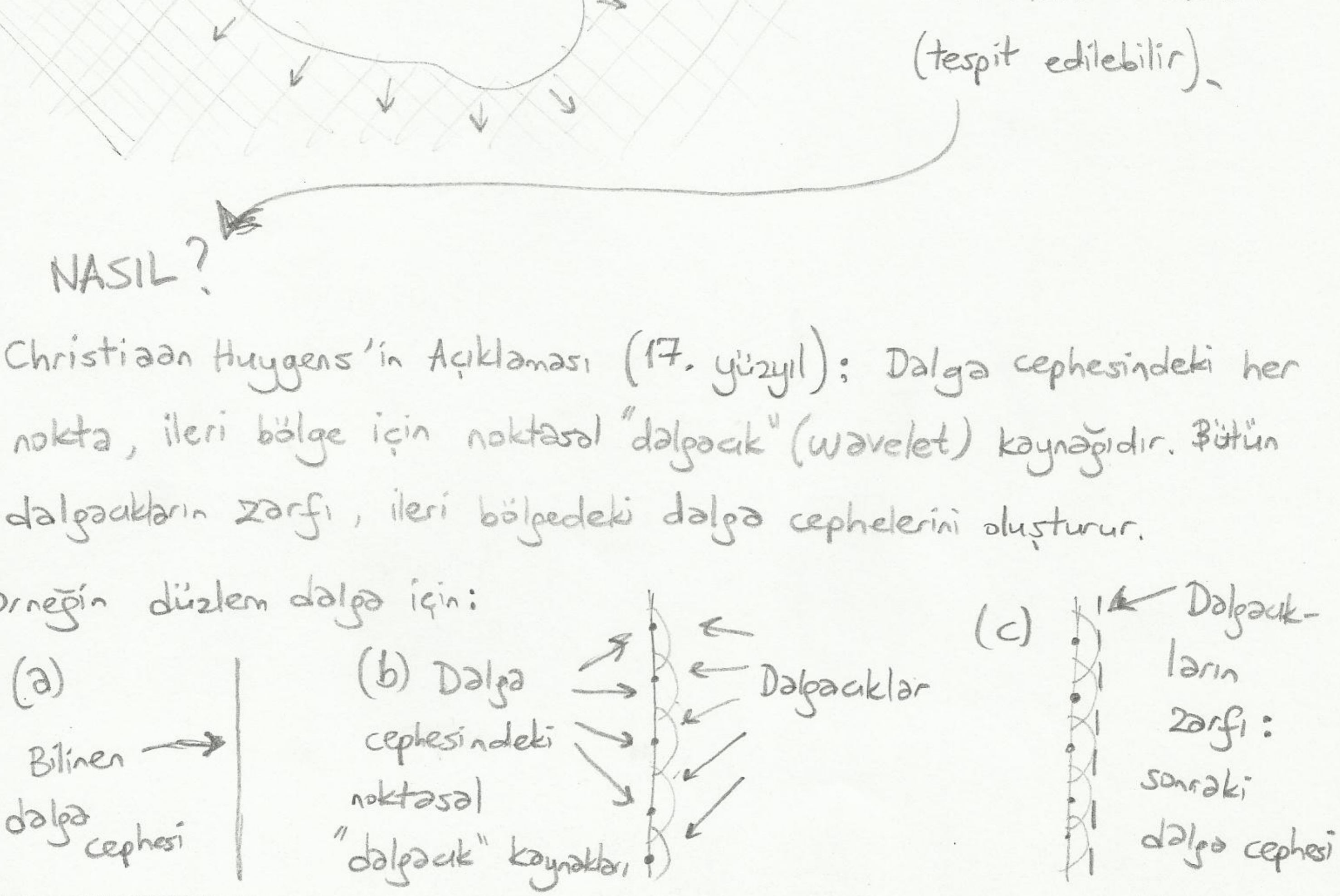
"Herhangi bir dalganın, bir dalga cephesi tam olarak biliniyorsa; dalganın ileri bölgedeki (yayılım yönüne göre ileri) tüm davranışı bulunabilir (tespit edilebilir)."

Taralı bölgede, dalganın davranışı tam olarak bilinebilir (tespit edilebilir).

NASIL?

Christiaan Huygens'in Açıklaması (17. yüzyıl): Dalga cephesindeki her nokta, ileri bölge için noktasal "dalgacık" (wavelet) kaynağıdır. Bütün dalgacıkların zarfı, ileri bölgedeki dalga cephelerini oluşturur.

Örneğin düzlem dalga için:



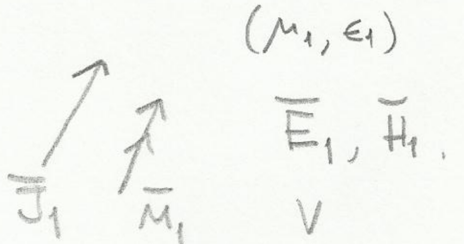
Augustin Fresnel'in Düzeltmesi (19. yüzyıl):

Dalgacıkların zarfı, homojen ortamlarda ileri bölgelerdeki dalga cephelerini oluşturur.

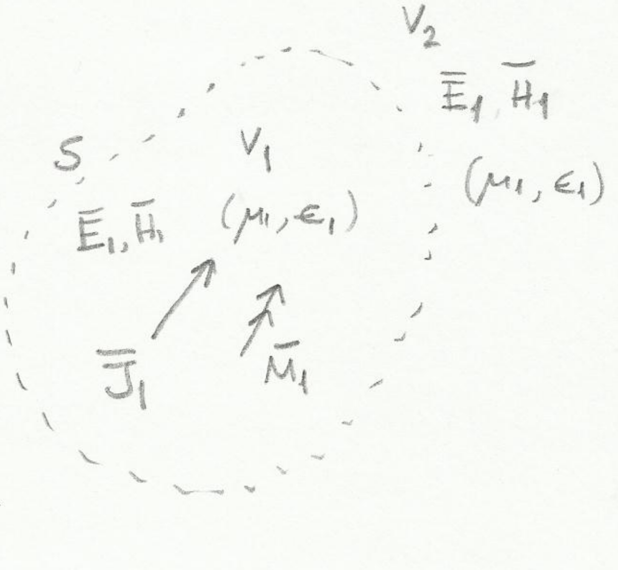
İnhomojen ortamlarda, dalgacıkları (faz ve şiddet terimlerini ayrı ayrı göz önünde bulundurarak) toplamak gerekir.

Yüzey Denklik Teoremi'nin Açıklaması:

$(\bar{J}_1, \bar{M}_1)$ ile gösterilen bir kaynağımız, (ϵ_1, μ_1) ile betimlenen bir ortamda ışıma yapıyor olsun. Bu kaynağın sebep olduğu alan, $(\bar{E}_1, \bar{H}_1)$ olsun.



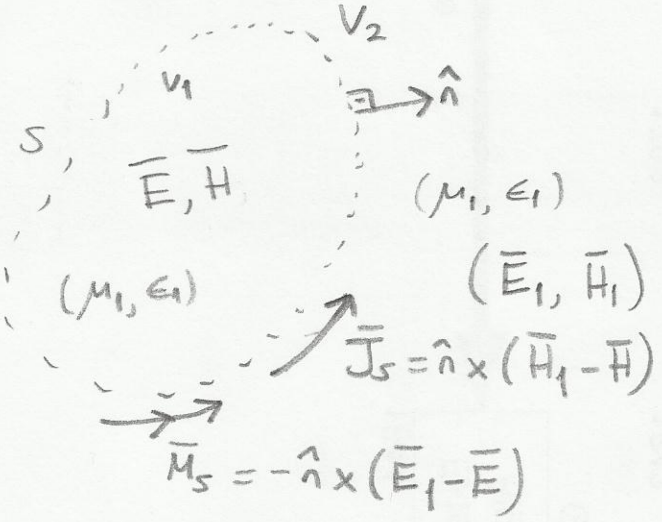
Amacımız, V uzayının bir kısmında (S ile çevrili V_1 hacmi) $\bar{E}_1, \bar{H}_1$'i bilmeye gerek kalmadan, V_1 hacminin dışında (V_2 hacminde) $\bar{E}_1, \bar{H}_1$'i hesaplayabileceğimiz pratik bir yöntem bulmak.



Şekil (1a)

Orijinal $(\bar{J}_1, \bar{M}_1)$ kaynakları olmadan, V_1 hacminde $(\bar{E}, \bar{H})$ (yani asıl alandan farklı); V_2 hacminde ise $(\bar{E}_1, \bar{H}_1)$ alanını sağlayan eşlenik bir konfigürasyon nasıl oluşturulabilir?

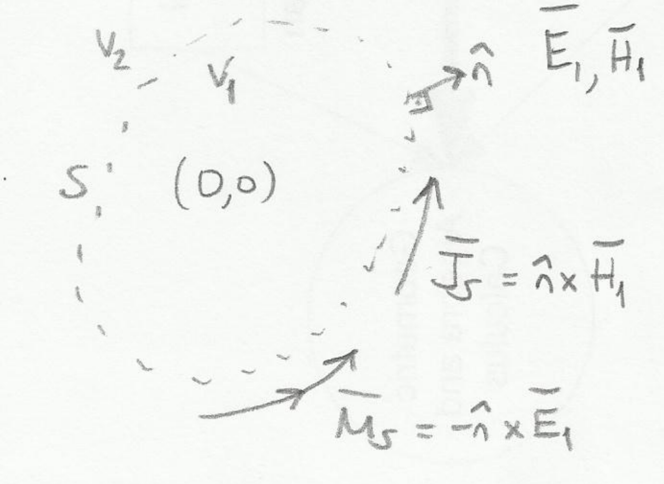
$\Rightarrow$ S yüzeyi üzerinde teğet elektrik ve manyetik alan bileşenlerinin sağladığı sınır koşullarını dikkate alarak!...



(Şekil 1b)

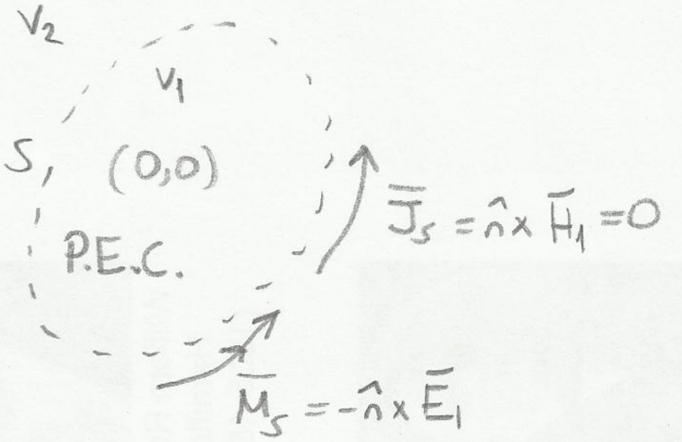
Şekil (1b); V_2 hacminde aynı alanı $(\bar{E}_1, \bar{H}_1)$ üretmesi itibarı ile Şekil (1a)'ya eşleniktir. İlgi alanımız V_1 değilse, sadece V_2 ise, bu durumda orijinal $(\bar{J}_1, \bar{M}_1)$ kaynakları yerine S yüzeyi üzerindeki $(\bar{J}_s, \bar{M}_s)$ eşlenik akımları ile problem basite indirgenmiş olur.

V_1 hacmi ilgi alanımız değilse, söz konusu hacmi veya $(\bar{E}, \bar{H})$ alanını istediğimiz gibi seçebiliriz.

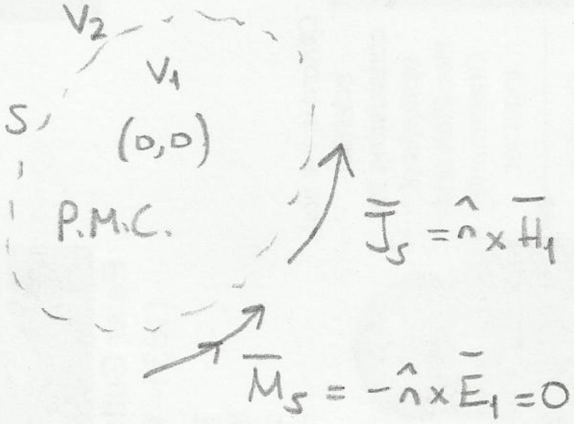


Love'in Denklik Önerisi

(Şekil 2a)



P.E.C.
Denklik
önerisi
(Şekil 2b)

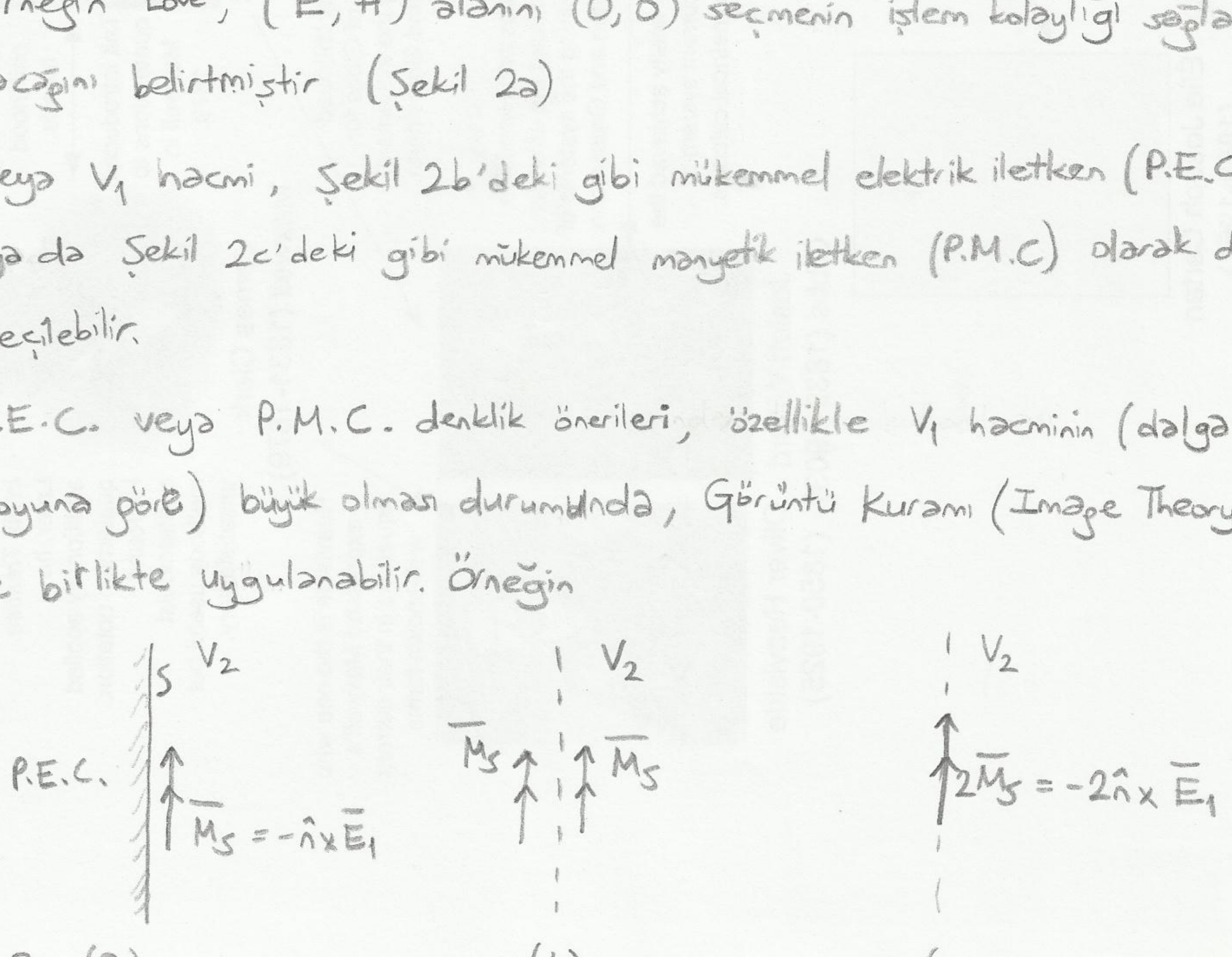


P.M.C.
Denklik
önerisi
(Şekil 2c)

Örneğin Love, $(\bar{E}, \bar{H})$ alanını $(0,0)$ seçmenin işlem kolaylığı sağlayacağını belirtmiştir (Şekil 2a)

Veya V_1 hacmi, Şekil 2b'deki gibi mükemmel elektrik iletken (P.E.C.); ya da Şekil 2c'deki gibi mükemmel manyetik iletken (P.M.C) olarak da seçilebilir.

P.E.C. veya P.M.C. denklik önerileri, özellikle V_1 hacminin (dalga boyuna göre) büyük olması durumunda, Görüntü Kuramı (Image Theory) ile birlikte uygulanabilir. Örneğin



Şekil 3 (a) (b) (c)

Şekil 3a : Büyük boyutlu bir V_1 hacmi için P.E.C. denklik önerisinin uygulanması sonucu eşlenik yüzey manyetik akımı.

Şekil 3b : P.E.C. yüzeye paralel olan yüzey manyetik akımının, Görüntü kuramı uyarınca görüntüsü

Şekil 3c : V_2 hacmine doğru ışıma yapan eşlenik yüzey akımı (Yüzey Denklik Teoremi uyarınca bulunan $\overline{M}_S$ ile; onun Görüntü kuramı uyarınca bulunan görüntüsü $\overline{M}_S$'in birleşimi)