## 2.4. Eğrisel Bağlantılı Uzaylar-2

**Teorem 2.4.4.** $(X_1, \tau_1)$ ve $(X_2, \tau_2)$ iki topolojik uzay olsun ve $X = X_1 \times X_2$ kümesi üzerinde $\tau_1$ ve $\tau_2$ topolojileri yardımıyla tanımlanan çarpım topolojik yapısı $\mathfrak{S}$ ile gösterilsin. Bu durumda, aşağıdaki önermeler denktirler.

$(i)$ $(X, \mathfrak{S})$ çarpım topolojik uzayı eğrisel bağlantılıdır,

$(ii)$ $(X_1, \tau_1)$ ve $(X_2, \tau_2)$ topolojik uzayları eğrisel bağlantılıdır.

**İspat:** $i \Rightarrow ii$ İzdüşüm fonksiyonları sürekli ve örten fonksiyonlar olduğundan açıktır.

$ii \Rightarrow i$ $\forall a = (a_1, a_2)$ ve $b = (b_1, b_2) \in X$ alalım. $a_1, b_1 \in X_1$ ve $X_1$ eğrisel bağlantılı olduğuna göre, bir $I_1 = [\alpha_1, \beta_1] \subset \mathbb{R}$ için,

$$f_1 : I_1 \longrightarrow X_1$$

biçiminde tanımlı, sürekli bir $f_1$ fonksiyonu mevcuttur ve $f_1(\alpha_1) = a_1$ ve $f_1(\beta_1) = b_1$ dir. Benzer şekilde, $a_2, b_2 \in X_2$ ve bir $I_2 = [\alpha_2, \beta_2] \subset \mathbb{R}$ için,

$$f_2 : I_2 \longrightarrow X_2$$

biçiminde tanımlı, sürekli bir $f_2$ fonksiyonu mevcuttur ve $f_2(\alpha_2) = a_2$ ve $f_2(\beta_2) =$

$b_2$ dir. Diğer yandan;

$$\begin{aligned} g_1: \quad [0,1] &\longrightarrow I_1 \\ t &\longrightarrow g_1(t) = (\beta_1 - \alpha_1)\, t + \alpha_1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g_2: \quad [0,1] &\longrightarrow I_2 \\ t &\longrightarrow g_2(t) = (\beta_2 - \alpha_2)\, t + \alpha_2 \end{aligned}$$

sürekli fonksiyonları için, $g_1(0) = \alpha_1, g_1(1) = \beta_1, g_2(0) = \alpha_2$ ve $g_2(1) = \beta_2$ olduğu açıktır. Dolayısıyla;

$$f = f_1 \circ g_1 : I_1 \longrightarrow X_1 \text{ ve } g = f_2 \circ g_2 : I_2 \longrightarrow X_2$$

fonksiyonları süreklidir ve $f(0) = a_1, f(1) = b_1, g(0) = a_2$ ve $g(1) = b_2$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} h: \quad [0,1] &\longrightarrow X \\ t &\longrightarrow h(t) = (f(t), g(t)) \end{aligned}$$

sürekli fonksiyonu elde edilir ve

$$h(0) = a, h(1) = b$$

dir. O halde, $X$ eğrisel bağlantılıdır.