2.5. Lokal Eğrisel Bağlantılı Topolojik Uzaylar

Tanım 2.5.1. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer; $\forall x \in X$ ve $\forall V \in \mathcal{V}_{(x)}$ için $U \subset V$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{V}_{(x)}$ var öyle ki (U,τ_U) eğrisel bağlantılı ise, (X,τ) topolojik uzayı *lokal eğrisel bağlantılıdır* denir.

Örnek 2.5.1. $\mathbb{R},\mathbb{R}^2,...,\mathbb{R}^n$ alışılmış yapılarıyla lokal eğrisel bağlantılı topolojik uzaylardır. Gerçekten; herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ ve $V \in \mathcal{V}_{(x)}$ alalım. Bu durumda, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$ olacak biçimde $\exists \varepsilon > 0$ vardır. $a = x - \frac{\varepsilon}{2}$ ve $b = x + \frac{\varepsilon}{2}$ alınırsa $U = [a,b] \subset V$ ve $U \in \mathcal{V}_{(x)}$ dir. Diğer yandan; $\forall x, y \in U$ için,

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & U \\ & t & \longrightarrow & f(t) = (y-x)\,t + x \end{array}$$

fonksiyonu sürekli ve $f(0) = x, f(1) = y$ dir. O halde, U eğrisel bağlantılıdır. Dolayısıyla, $\mathbb{R}$ lokal eğrisel bağlantılıdır. Benzer şekilde, $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3,...,\mathbb{R}^n$ in de lokal eğrisel bağlantılı olduğu gösterilebilir.

Teorem 2.5.1. Lokal eğrisel bağlantılı bir uzayın sürekli ve açık bir fonksiyon altındaki görüntüsü de lokal eğrisel bağlantılıdır.

İspat: (X,τ) ve (Y,τ') iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $y \in f(X)$ alalım ve V kümesi, y noktasının $\left(f(X), \tau'_{f(X)}\right)$

alt uzayında herhangi bir komşuluğu olsun. O halde,

$$\exists U \in \mathcal{V}_{(y)} \text{ için } V = U \cap f(X)$$

dir. Diğer yandan, $y = f(x)$ olacak biçimde $\exists x \in X$ vardır ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}_{(x)}$ dir. X lokal eğrisel bağlantılı olduğundan, $G \subset f^{-1}(U)$ olacak biçimde $\exists G \in \mathcal{V}_{(x)}$ vardır öyle ki (G, τ_G) eğrisel bağlantılıdır.Eğrisel bağlantılı bir uzayın sürekli fonksiyon altında görüntüsü de eğrisel bağlantılı olacağından, $\left(f(G), \tau'_{f(G)}\right)$, Y nin eğrisel bağlantılı bir alt uzayıdır. Eğrisel bağlantılılık topolojik özellik ve

$$\tau'_{f(G)} = \left(\tau'_{f(X)}\right)_{f(G)}$$

olduğundan, $f(G) \subset f(X)$, $f(X)$ den indirgenen yapısıyla da eğrisel bağlantılıdır. Ayrıca, f açık olduğundan $f(G)$, $y \in Y$ noktasının bir komşuluğudur. Dolayısıyla; $f(X)$ içinde de y noktasının bir komşuluğudur ve

$$f(G) \subset U \cap f(X) = V$$

olduğundan ispat tamamlanır.