

ÜSLÜ İFADELER

$a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, n tane a sayısının çarpımı olan a^n ifadesine “üslü ifade” denir. a^n ifadesinde ; a 'ya “taban”, n 'ye de “üs(kuvvet)” adı verilir.

$$\underbrace{a.a.a.\dots\dots a}_{n \text{ tane}} = a^n$$

Uyarı: $\underbrace{a+a+a+\dots\dots+a}_{n \text{ tane}} = n.a$ ve $\underbrace{a.a.a.\dots\dots a}_{n \text{ tane}} = a^n$ olduğu karıştırılmamalıdır.

Örnek:

$$4^3 = 4.4.4 = 64$$

$$(-2)^4 = (-2).(-2).(-2).(-2) = 16$$

$$(-5)^3 = (-5).(-5).(-5) = -125$$

Üslü İfadelerde İşlemlere Ait Özellikler:

1. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a, b \neq 0$ olmak üzere;

$$1^n = 1 \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^1 = a \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

$$2. k.a^n \mp p.a^n = (k \mp p).a^n$$

$$3. a^x . a^y = a^{x+y}$$

$$4. \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, a \neq 0$$

$$5. a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$6. \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, b \neq 0$$

$$7. (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Örnek:

$$25^0 = 1 \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^{-1} = -\frac{5}{2}$$

$$(-9)^0 = 1 \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$-2014^0 = -1 \quad (-2)^{-5} = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$$

Örnek:

$$-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^4 = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = -(-2)^4 = -2^4 = -16$$

Örnek: $-4^5 + 3 \cdot 4^5 - 7 \cdot 3^4 - 3 \cdot 3^4 - 4^5 = 4^5 \cdot (-1 + 3 - 1) + 3^4 \cdot (-7 - 3)$

$$= 4^5 - 10 \cdot 3^4$$

Örnek: $\frac{5^{80} + 5^{85} + 5^{90}}{5^{85} + 5^{80} + 5^{75}} = x$ ise $\frac{x}{125}$ ifadesinin eşiti nedir?

çözüm: $x = \frac{5^{80} + 5^{85} + 5^{90}}{5^{85} + 5^{80} + 5^{75}} = \frac{5^{80} \cdot (1 + 5^5 + 5^{10})}{5^{75} \cdot (5^{10} + 5^5 + 1)} = \frac{5^{80}}{5^{75}} = 5^{80-75} = 5^5$

Sorulan ifadede x yerine 5^5 yazılırsa;

$$\frac{x}{125} = \frac{5^5}{5^3} = 5^{5-3} = 5^2 = 25 \text{ elde edilir.}$$

Örnek: $\frac{14^n + 6^n + 2^n}{7^n + 3^n + 1}$ ifadesi neye eşittir?

$$\text{çözüm: } \frac{14^n + 6^n + 2^n}{7^n + 3^n + 1} = \frac{(7 \cdot 2)^n + (3 \cdot 2)^n + 2^n}{7^n + 3^n + 1} = \frac{7^n \cdot 2^n + 3^n \cdot 2^n + 2^n}{7^n + 3^n + 1} = \frac{2^n \cdot (7^n + 3^n + 1)}{7^n + 3^n + 1} = 2^n$$

Örnek: $(0,027)^{\frac{5}{3}} \cdot 10^5$ işleminin sonucu neye eşittir?

çözüm:

$$\begin{aligned} (0,027)^{\frac{5}{3}} \cdot 10^5 &= (27 \cdot 10^{-3})^{\frac{5}{3}} \cdot 10^5 = (3^3)^{\frac{5}{3}} \cdot (10^{-3})^{\frac{5}{3}} \cdot 10^5 \\ &= 3^5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^5 = 3^5 \cdot 10^{-5+5} = 3^5 \cdot 10^0 = 3^5 \end{aligned}$$

Örnek: $\frac{-9^{-2} \cdot 25^{-1}}{125^{-1} \cdot 27^{-1}} = ?$

$$\text{çözüm: } \frac{-9^{-2} \cdot 25^{-1}}{125^{-1} \cdot 27^{-1}} = \frac{-(3^2)^{-2} \cdot (5^2)^{-1}}{(5^3)^{-1} \cdot (3^3)^{-1}} = \frac{-3^{-4} \cdot 5^{-2}}{5^{-3} \cdot 3^{-3}} = -\frac{5^{3-2}}{3^{4-3}} = -\frac{5}{3}$$

Örnek: $\frac{x^{a+1}}{x^{a-2}} \cdot \left(\frac{x^{-a+2} \cdot x^{2a+3}}{x} \right)^{-1}$ ifadesinin eşiti nedir?

çözüm: Tabanı aynı olan üslü ifadeler çarpılırken üsler toplanıyor, bölünürken üsler çıkarılıyordu. Buradan;

$$\frac{x^{a+1}}{x^{a-2}} \cdot \left(\frac{x^{-a+2} \cdot x^{2a+3}}{x} \right)^{-1} = x^{a+1-a+2} \cdot (x^{-a+2+2a+3-1})^{-1} = x^3 \cdot (x^{a+4})^{-1} = x^3 \cdot x^{-a-4} = x^{3-a-4} = x^{-a-1}$$

elde edilir.

Örnek: $\left(\frac{a^x}{a^y}\right)^{x-y} \cdot \left(\frac{a^y}{a^x}\right)^{x-y}$ ifadesinin eşiti nedir?

çözüm:

1.yol:

$$\left(\frac{a^x}{a^y}\right)^{x-y} \cdot \left(\frac{a^y}{a^x}\right)^{x-y} = (a^{x-y})^{x-y} \cdot (a^{y-x})^{x-y}$$

Üsleri aynı olan üslü ifadeler, ortak üs altında yazılabiliyordu. Buradan;

$$= (a^{x-y} \cdot a^{y-x})^{x-y} = (a^{x-y+y-x})^{x-y} = (a^0)^{x-y} = 1^{x-y} = 1$$

sonucu bulunur.

2.yol: $\left(\frac{a^x}{a^y}\right)^{x-y} \cdot \left(\frac{a^y}{a^x}\right)^{x-y} = \left(\frac{a^x}{a^y} \cdot \frac{a^y}{a^x}\right)^{x-y}$

elde edilir. Bu ifadede parantez içindeki gerekli sadeleştirmelerden sonra:

$$\left(\frac{a^x}{a^y} \cdot \frac{a^y}{a^x}\right)^{x-y} = 1^{x-y} = 1$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek: $3^x = 2$ olduğuna göre $27^{x+1} - 81^x$ ifadesinin değeri kaçtır?

çözüm:

$$27^{x+1} - 81^x = (3^3)^{x+1} - (3^4)^x = 3^{3x+3} - 3^{4x}$$

$$= (3^x)^3 \cdot 3^3 - (3^x)^4$$

$$= 2^3 \cdot 3^3 - 2^4$$

$$= 200$$

MUTLAK DEĞER

Bir x reel sayısının mutlak değeri $|x|$ ile gösterilir.

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \\ -x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{şeklinde tanımlıdır.}$$

NOT: Sıfırdan farklı her reel sayının mutlak değeri pozitiftir. Yani, mutlak değerli ifadenin sonucu daima pozitif olup en az sıfıra eşit olabilir. Hiçbir zaman negatif bir sayı olamaz.

$$|-2| = |2| = 2 \quad |0| = 0$$

Örnek: $x - 2 = y$ olduğuna göre $|x - y| + |y - x|$ ifadesi neye eşittir?

$$\text{çözüm: } x - 2 = y \Rightarrow x - y = 2$$

$$\Rightarrow y - x = -2$$

olur. Buradan,

$$|x - y| + |y - x| = |2| + |-2| = 2 + 2 = 4 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek: $x \in \mathbb{R}$ ve $-2 < x < 4$ olduğuna göre $|x+2| + |x-4|$ ifadesinin eşiti nedir?

çözüm: $-2 < x < 4 \Rightarrow x+2 > 0$ ve $x-4 < 0$ dır. Buradan,

$$|x+2| + |x-4| = x+2 - (x-4)$$

$$= x+2 - x+4$$

$$= 6 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek: $x < 0 < y$ ise $\frac{|2x - y| - |2y - x|}{x+y}$ ifadesi neye eşittir?

çözüm: $x < 0 < y \Rightarrow 2x < 0$ ve $2y > 0$

$\Rightarrow 2x - y < 0$ ve $2y - x > 0$ 'dır. Buradan,

$$\frac{|2x - y| - |2y - x|}{x+y} = \frac{-(2x - y) - (2y - x)}{x+y}$$

$$= \frac{-2x+y-2y+x}{x+y}$$

$$= \frac{-(x+y)}{x+y}$$

$$= -1 \text{ bulunur.}$$

KÖKLÜ İFADELER

$a, b \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $b^n = a$ ifadesindeki b sayısına a sayısının “ n . kuvvetten kökü” denir.

$$b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

şeklinde gösterilir.

NOT: $\sqrt[n]{f(x)} \in \mathbb{R}$ olması için $f(x) \geq 0$ olmalıdır.
Her $f(x) \in \mathbb{R}$ için $\sqrt[2n+1]{f(x)} \in \mathbb{R}$ dir.

Örnek: $\sqrt{25} \in \mathbb{R}, \sqrt{0} \in \mathbb{R}, \sqrt[4]{81} \in \mathbb{R}, \sqrt[5]{7} \in \mathbb{R}, \sqrt[2]{0} \in \mathbb{R}, \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}, \sqrt[3]{-3} \in \mathbb{R}$

Köklü Sayılarda İşlemlere Ait Özellikler:

$$1. k. \sqrt[n]{a} \mp p. \sqrt[n]{a} = (k \mp p). \sqrt[n]{a}$$

$$2. (k. \sqrt[n]{a}). (p. \sqrt[n]{b}) = (k.p). \sqrt[n]{a.b}$$

$$3. \frac{k. \sqrt[n]{a}}{p. \sqrt[n]{b}} = \frac{k}{p}. \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, p, b \neq 0$$

$$4. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

$$5. \sqrt[m]{a^n \sqrt[n]{b}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n b}} = \sqrt[mn]{a^n \cdot b}$$

$$6. (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$$

$$7. \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$8. n \text{ tek ise: } \sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$n \text{ çift ise: } \sqrt[n]{a^n \cdot b} = |a| \cdot \sqrt[n]{b}$$

Örnek:

$$\begin{aligned} \sqrt{0,64} + \sqrt{0,04} - \sqrt[3]{0,027} &= \sqrt{\frac{64}{100}} + \sqrt{\frac{4}{100}} - \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{2}{10}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{3}{10}\right)^3} \\ &= \frac{8}{10} + \frac{2}{10} - \frac{3}{10} \\ &= \frac{7}{10} \\ &= 0,7 \end{aligned}$$

Örnek:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{12}}{\sqrt{108} + \sqrt{48}} &= \frac{\sqrt{5^2 \cdot 3} - \sqrt{3^2 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 3}}{\sqrt{6^2 \cdot 3} + \sqrt{4^2 \cdot 3}} \\ &= \frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{6\sqrt{3} + 4\sqrt{3}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

$a < 0 \Rightarrow -a > 0$, $|-a| = -a$ ' dir. Buna göre;

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2} + \sqrt{(-a)^2} - \sqrt{4a^2} &= |a| + \sqrt{(-a)^2} - \sqrt{(2a)^2} \\ &= |a| + |-a| - |2a| \\ &= -a + (-a) - (-2a) \\ &= -a - a + 2a \\ &= 0 \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek: $a > 0$ ve $b < 0$ ise, $\sqrt{(b-a)^2} - \sqrt{(2a-b)^2}$ ifadesinin eşiti nedir?

çözüm: $a > 0$, $b < 0$ ise: $b - a < 0$ ve $2a - b > 0$ ' dir. Buradan,

$$\begin{aligned} \sqrt{(b-a)^2} - \sqrt{(2a-b)^2} &= |b-a| - |2a-b| \\ &= -(b-a) - (2a-b) \\ &= -b+a - 2a+b \\ &= -a \text{ olarak bulunur} \end{aligned}$$

Eşlenik İfadeler:

$$\sqrt{a}' \text{ nin eşleniği: } \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b}' \text{ nin eşleniği: } \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b}' \text{ nin eşleniği: } \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\left(\begin{array}{l} \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a \\ (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = a - b \end{array} \right)$$

Paydanın Kökten Kurtarılması:

Kesirli bir ifadenin paydası köklü ise, paydayı kökten kurtarmak için; paydanın eşleniği ile hem pay hem de payda çarpılır.

Örnek:

$$\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

($\sqrt{6}$)

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5^2}-\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{15}+6}{5-3} = \frac{2(\sqrt{15}+3)}{2} = \sqrt{15}+3$$

($\sqrt{5}+\sqrt{3}$)

Örnek: $A=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ve $B=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ olduğuna göre; $\frac{A}{B} + \frac{B}{A} + 2$ ifadesi neye eşittir?

çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} + \frac{B}{A} + 2 &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + 2 = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{\sqrt{5^2}-\sqrt{3^2}} + \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{\sqrt{5^2}-\sqrt{3^2}} + 2 \\ &= \frac{5-2\sqrt{15}+3+5+2\sqrt{15}+3}{2} + 2 = 8+2=10 \end{aligned}$$