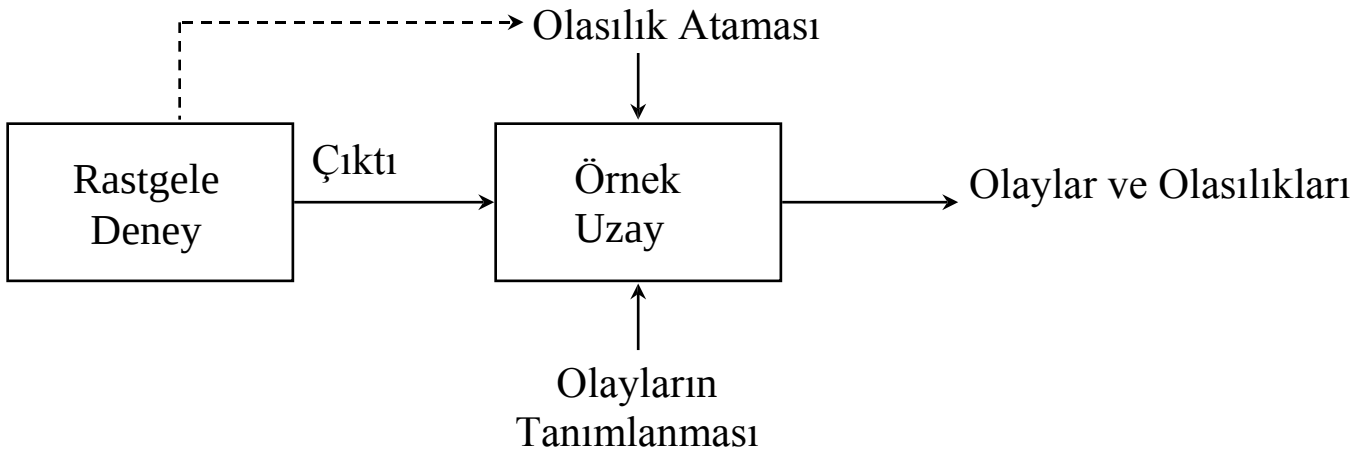
Olasılığın Temelleri



- Bir rastgele deneyde çıktı kesin belli değildir
  - Fiziksel deney
  - Soyutluk
- Bütün çıktıların toplandığı kümeye örnek uzay denir ve S ile gösterilir
  - Evrensel olay veya kesin olay
- Bir olay tek veya bir grup çıktıdan oluşabilir.
  - Olaylar kullanıcı tarafından tanımlanır: A, B, …
- Bir olayın meydana gelme olabilirliğinin ölçüsü, A
  - A nın olasılığı veya Pr[A] şeklinde tanımlanır.

<u>Örnek</u>:

Zarın bir kere atılması. Herhangi bir yüzün yukarı bakması eşit şekilde olası.

- Örnek Uzay [kesikli örnek uzay]

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

- Çeşitli olaylar:

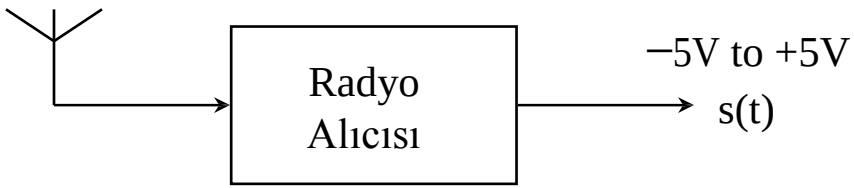
$$A_1 = \{\text{tek sayılı yüzler}\} = \{1,3,5\}$$
$$A_2 = \{\text{yüz değeri} < 3\} = \{1,2\}$$
$$A_3 = \{\text{çift sayılı yüzler }\} = \{2,4,6\}$$

- Olasılıklar:

$$\Pr[A_1] = 3/6 = 1/2$$
$$\Pr[A_2] = 2/6 = 1/3$$
$$\Pr[A_3] = 3/6 = 1/2$$

Sürekli Örnek Uzayı

Sürekli örnek uzay <=> Genliği sürekli sinyaller



- $t = t_1$ anında radyo alıcısının çıkışı ölçülüyor. Alıcı çıkışının dinamik aralığı −5V to +5V

$$S = \{s: -5 \le s \le +5\}$$

- Sürekli örnek uzayı sonsuz sayıda çıktıya sahiptir
  - s, 4.9326784531432677… gibi değerler alabilir
- Örnek olaylar ve olasılıkları:

$$A_1 = \{s: \ -2.5 \le s \le 2.5\}, \qquad \Pr[A_1] = 0.50$$

$$A_2 = \{s: \ -1 \le s \le 1\}, \qquad \Pr[A_2] = 0.20$$

$$A_3 = \{s: \ s = 2.3 + \Delta x\}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \Pr[A_3] = 0$$

Kesikli Örnek Uzayı

Kesikli örnek uzayı <=> kesikli değerli sinyaller

- 8-bit ADC çıkışında sadece $2^8 = 256$ değer vardır

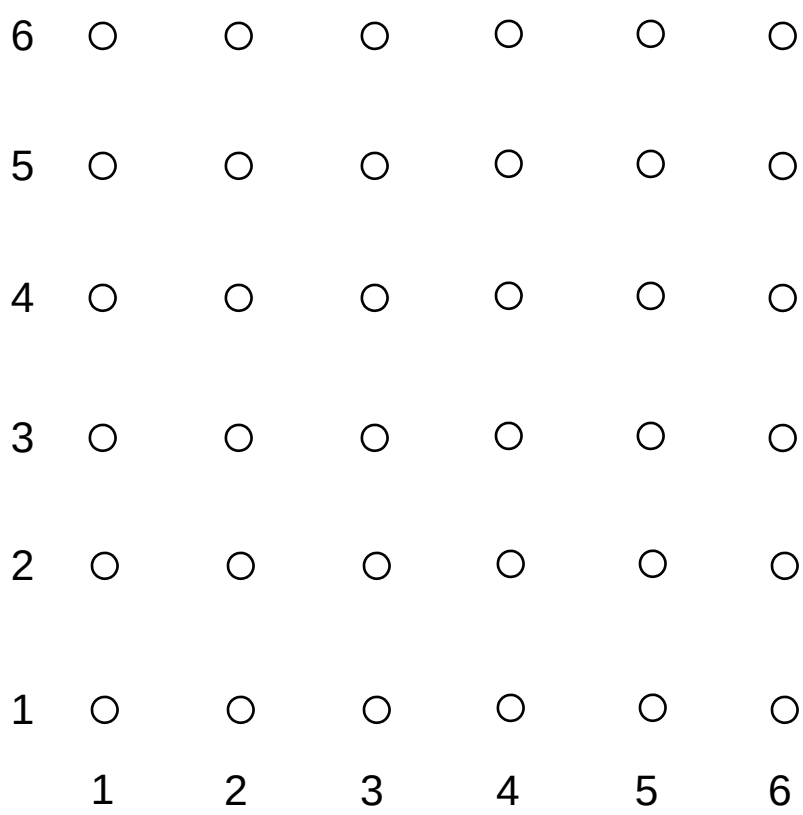
  $S = \{-5, -4.9609375, \ldots, -0.0390625, 0, 0.0390625, \ldots, 4.9609375\}$
  veya
  $S = \{-128, -127, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 127\}$: 2'nin desimal karşılıkları

- Kesikli örnek uzayı sonlu sayıda değer ya da çıktıya sahiptir
  - Verilen örnekte 256 değer ya da çıktı vardır (sonlu)

İki boyutlu örnek uzayı

İki zar atılması [kesikli örnek uzayı]

S = {(i,j): (1,1), (1,2), (1,3), …, (4,3), …, (6,4), (6,5), (6,6)}



Olaylar ve Olay İşlemleri

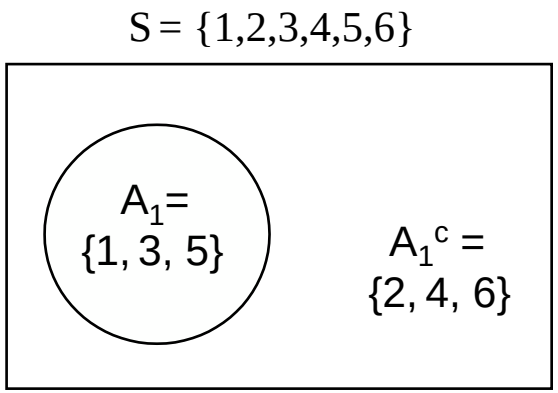
S	Kesin olay
0	Hükümsüz (sıfır) olay
$A_1, A_2, A_3, \ldots$	Tanımlanmış olaylar
$A_1 + A_2$	Birleşim işlemi ($A_1 \cup A_2$)
$A_1 A_2$	Kesişim işlemi ($A_1 \cap A_2$)
A^C	Tümleme işlemi

Örnek:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ile gösterilen örnek uzayı ele alalım

A_1 = {1, 3, 5}, A_2 = {1, 2}, ve A_3 = {2, 4, 6} tanımlanmış olaylar olsun

- $A_1^C = (\{1,3,5\})^C = \{2,4,6\} = A_3$
- $A_2 + A_3 = \{1,2,4,6\}$
- $A_1 + A_3 = \{1,2,3,4,5,6\} = S$
- $A_1 A_2 = \{1\}$, $A_2 A_3 = \{2\}$
- $A_1 A_3 = 0$
- $A_1 + 0 = A_1$
- $A_1 0 = 0$



Bazı kurallar

- $A_1 A_1^C = 0$ Karşılıklı kapsamama
- $A_1 S = A_1$ Kapsama
- $(A_1^C)^C = A_1$ Duble tümleme
- $A_1 + A_2 = A_2 + A_1$ Değişim kuralı
- $A_1 + (A_2 + A_3) = (A_1 + A_2) + A_3$ Birleşme kuralı
- $A_1 (A_2 + A_3) = A_1 A_2 + A_1 A_3$ Dağıtım kuralı
- $(A_1 A_2)^C = A_1^C + A_2^C$ De Morgan kuralı

Diğer özellikler

- $S^C = 0$
- $A_1 + 0 = A_1$ Kapsama
- $A_1 A_2 = A_2 A_1$ Değişim kuralı
- $A_1 (A_2 A_3) = (A_1 A_2) A_3$ Birleşim kuralı
- $A_1 + (A_2 \quad A_3) = (A_1 + A_2)(A_1 + A_3)$ Dağılım kuralı
- $(A_1 + A_2)^C = A_1^C A_2^C$ De Morgan kuralı

Sonlu birleşim ve kesişimler

$$\bigcup_{i=1}^{N} A_i = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_N$$

$$\bigcap_{i=1}^{N} A_i = A_1 A_2 A_3 \ldots A_N$$

Sonsuz birleşim ve kesişimler

<u>Buna Sigma Cebri de denir</u>

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 A_2 A_3 \ldots$$

Karşılıklı Kapsamayan ve Birlikte Tamamlayan (*Mutually Exclusive and Collectively Exhaustive*) Olaylar Kümeleri

Karşılıklı kapsamayan: $A_k \; A_j = 0 \qquad k \neq j$

Birlikte tamamlayan: $\bigcup_j A_j = S$

Bu durumda

ÖRNEK UZAY BİR DENEYİN KARŞILIKLI KAPSAMAYAN, BİRLİKTE TAMAMLAYAN ÇIKTILARINDAN OLUŞUR

denir.

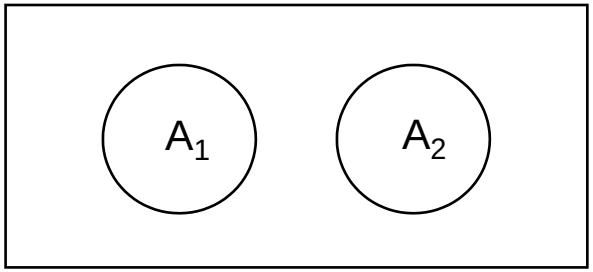
Olasılığın Aksiyomları

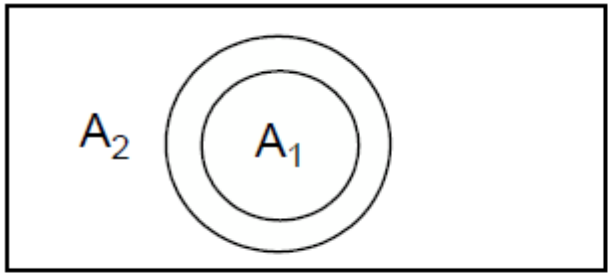
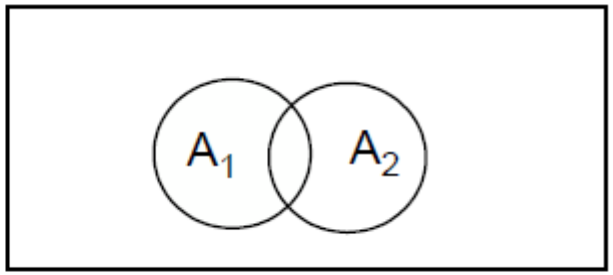
I. $\Pr[A_i] \geq 0$ herhangi bir olay için

II. $\Pr[S]=1$

III(a). $A_1 A_2 = 0$, için $\Pr[A_1 + A_2] = \Pr[A_1] + \Pr[A_2]$

III(b). $A_i A_j = 0$, $i \neq j$, ise $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$



Bazı Çıkarımlar

1. $\Pr[A^c] = 1 - \Pr[A]$
2. $0 \le \Pr[A] \le 1$
3. Eğer $A_1 \subset A_2$ ise $\Pr\left[A_1\right] \le \Pr\left[A_2\right]$
4. $\Pr[0] = 0$
5. Eğer $A_1 A_2 = 0$ ise $\Pr\left[A_1 A_2\right] = 0$
6. $\Pr[A_1 + A_2] = \Pr[A_1] + \Pr[A_2] - \Pr[A_1 A_2]$