DENKLEMLER:

Değişken içeren ve değişkenlerin belli değerleri için doğru olan cebirsel eşitliklere "denklem" denir.

Bir denklemde eşitliği sağlayan(doğrulayan) değerlere; verilen denklemin "kökleri" veya "çözümü" denir.

Tek bilinmeyen içeren denklemlere "bir bilinmeyenli denklem", iki bilinmeyen içeren denklemlere ""iki bilinmeyenli denklem" ve genel olarak n- bilinmeyen içeren denklemlere "n-bilinmeyenli denklem" denir. Örneğin;

$3x - 2 = 5$ denklemi bir bilinmeyenli denklem,

$2xy - x^3y+y^2 = 3$ denklemi iki bilinmeyenli denklem,

$x+y+z=1$ denklemi üç bilinmeyenli denklemdir.

Bir tek bilinmeyen içeren ve bilinmeyeninin derecesi "1" olan denklemlere "birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem(veya doğrusal denklem) ler, tek bilinmeyen içeren ve bilinmeyeninin derecesi "2" olan denklemlere "ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler", tek bilinmeyen içeren ve bilinmeyeninin derecesi "3" olan denklemlere "üçüncü dereceden bir bilinmeyenli denklemler" ve en genel haliyle tek bilinmeyen içeren ve bilinmeyeninin derecesi "n" olan denklemlere "n. dereceden bir bilinmeyenli denklemler" denir.

A)Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler:

$a,b \in R$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax+b=0$ şeklindeki denkleme "bilinmeyeni x olan birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem" denir. Denklemi sağlayan x sayısına "denklemin kökü(çözümü)", x bilinmeyenini bulma işlemine "denklemin çözümü", denklemin köklerinin oluşturduğu kümeye de "denklemin çözüm kümesi" denir.

$ax+b=0$ denkleminde:

* $a=0$, $b=0 \Rightarrow$ Denklemin sonsuz çözümü vardır.(Çünkü, x bilinmeyeninin alacağı her reel sayı değeri için $ax+b=0$ denklemi çözümlüdür.) Bu durumda denklemin çözüm kümesi, Ç.K=R' dir.

* $a=0$, $b \neq 0 \Rightarrow$ Denklemin çözüm kümesi, Ç.K=$\varnothing$' dir .

* $a \neq 0 \Rightarrow$ ax+b=0 denkleminin tek çözümü(kökü) vardır. Bu çözüm değeri;

$$ax+b=0 \Rightarrow x= -\frac{b}{a}$$

şeklinde olup, denklemin çözüm kümesi, Ç.K=$\left\{-\frac{b}{a}\right\}$'dır.

Örnek: 3x-5=0 denkleminin çözümünü bulunuz.

çözüm: Bir denklemin çözümünü bulmak demek; denklemde bilinmeyenin alacağı değeri bulmak demektir. Buna göre, $3x-5=0$ denkleminde x' in alacağı değeri bulmak için önce denklemin her iki tarafına +5 ilave ederiz.

$$3x-5=0 \Rightarrow 3x-5+5=0+5$$

$$3x=5$$

olur. Daha sonra, x' i tek bırakmak için denklemin her iki tarafını, x'in yanında x ile çarpım durumunda olan sayıya(3'e) böleriz.

$$3x=5 \Rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

O halde, 3x-5=0 denkleminin çözümü x=$\frac{5}{3}$ değeridir.

Örnek: $3x+12+x-8=10-3x+8$ denklemini çözünüz.

çözüm: $3x+12+x-8=10-3x+8 \Rightarrow 4x+4=18-3x$

$$\Rightarrow 4x+3x=18-4$$

$$\Rightarrow 7x=14$$

$$\Rightarrow x=\frac{14}{7}=2$$

$$\Rightarrow Ç.K=\{2\}$$

Örnek: $\frac{1}{2x}+\frac{3}{x-5}=0$ denklemini çözünüz.

çözüm: Verilen denklem birinci dereceden ifadeler içeren rasyonel ifadelerin bir denklemidir. $x \neq 0$ ve $x \neq 5$ olmak üzere paydaları eşitlersek;

$$\frac{1}{2x}+\frac{3}{x-5}=0 \Rightarrow \frac{x-5}{2x(x-5)}+\frac{3.2x}{2x(x-5)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{x-5+6x}{2x(x-5)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{7x-5}{2x(x-5)}=0$$

olarak bulunur. Bu eşitliğin sağlanması, paydayı sıfır yapan x=0, x=5 durumları hariç pay kısmında bulunan ifadenin sıfır olması ile mümkündür. Yani,

$$7x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{7}$$

değeri denklemin tek çözüm değeridir. O halde verilen denklemin çözüm kümesi, Ç.K=$\left\{\frac{5}{7}\right\}$ ’dir.

B)Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler:

a, b, c $\in$ R, $a \neq 0$, $b \neq 0$ ve x ile y bilinmeyenler olmak üzere,

$$ax+by+c=0$$

şeklindeki denkleme “birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem” denir. Bu denklemi sağlayan x ve y değerlerinin oluşturduğu (x, y) ikilileri bu denklemin bir çözümü olup, denklemin çözüm kümesinin elemanlarıdır.

İki bilinmeyenli birinci dereceden bir denklemin tek çözümünün olabilmesi için, en az iki tane denkleme ihtiyaç vardır.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri:

a, b, c, d, e, f $\in$ R olmak üzere,

$$\begin{aligned} &ax+by+c=0 \\ &dx+ey+f=0 \end{aligned}$$

şeklindeki iki denkleme “”birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi” denir.

Bu sistemdeki her bir denklemin x ve y bilinmeyenlerinin katsayılarından en az biri sıfırdan farklı olmalıdır.

Sistemin çözümü demek, her iki eşitliği de sağlayan bir (x, y) sıralı ikilisi bulmak demektir.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri:

1)Yok Etme Metodu:

Örnek: $\left.\begin{aligned} 2x-y &= -1 \\ x-2y &= 4 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözümü nedir?

çözüm:

1.yol: Birinci denklemin her iki tarafını -2 ile çarpıp, elde ettiğimiz denklemi ikinci denklem ile toplarsak:

$$2x-y=-1 \Rightarrow -4x+2y=2$$

$$\begin{array}{rr} & -4x+2y=2 \\ + & x-2y=4 \\ \hline & -3x=6 \\ & x=-2 \end{array}$$

bulunur. Bulduğumuz x= -2 değerini soruda verilen iki denklemden birinde yerine yazarsak:

$$x-2y=4 \Rightarrow -2-2y=4$$

$$\Rightarrow -2y=6$$

$$\Rightarrow y=-3$$

elde ederiz. Böylece, verilen denklem sisteminin çözümü (x, y)=(-2, -3) noktasıdır.

2.yol: İkinci denklemin her iki tarafını -2 ile çarpıp, elde etiğimiz denklemi birinci denklem ile toplarsak:

$$x-2y=4 \Rightarrow -2x+4y=-8$$

$$\begin{array}{rr} & 2x-y=-1 \\ + & -2x+4y=-8 \\ \hline & 3y=-9 \end{array}$$

$$y=-3$$

bulunur. Bulduğumuz $y=-3$ değerini verilen denklem sistemindeki denklemlerden birinde yerine yazarsak:

$$2x-y=-1 \Rightarrow 2x-(-3)=-1$$

$$\Rightarrow 2x+3=-1$$

$$\Rightarrow 2x=-4$$

$$\Rightarrow x=-2$$

bulunur. O halde, verilen denklem sisteminin çözümü bu yolla da (x,y)= $(-2,-3)$ olarak bulunmuş olur.

2)Yerine Koyma Metodu:

Örnek:

$$\left.\begin{array}{l} x+6y=162 \\ \frac{y}{x}=\frac{1}{3} \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesi nedir?

çözüm: Verilen denklemlerin ikincisinde x' i y cinsinden yazarsak,

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{3} \Rightarrow x=3y$$

olur. x' in 3y'ye eşitliğini kullanırsak, yani birinci denklemde x gördüğümüz yere 3y yazarsak,

$$x+6y=162 \Rightarrow 3y+6y=162$$

$$\Rightarrow 9y=162$$

$$\Rightarrow y=18$$

bulunur. y=18 değerini ikinci denklemde yerine yazarsak,

$$\frac{18}{x}=\frac{1}{3} \Rightarrow x=54$$

elde edilir. O halde, verilen denklem sisteminin çözüm kümesi Ç.K= $\{(54,18)\}$' dir .

3) Karşılaştırma Metodu:

Örnek: $$\left.\begin{array}{l} a+\frac{1}{b}=4 \\ b+\frac{1}{a}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b}$$ ifadesi neye eşittir?

çözüm:

$$a+\frac{1}{b}=4 \Rightarrow \frac{ab+1}{b}=4 \Rightarrow ab+1=4b \qquad (1)$$

$$b+\frac{1}{a}=3 \Rightarrow \frac{ab+1}{a}=3 \Rightarrow ab+1=3a \qquad (2)$$

(1)ve (2) no' lu denklemlerin her ikisi de, ab+1 ifadesinin eşiti olan cebirsel ifadeleri göstermektedir. Dolayısıyla,

$$4b=3a$$

olmak zorundadır. Buradan,

$$4b=3a \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{4}{3}$$

olarak bulunur.

Örnek: $\left.\begin{array}{l} 5x+2y=1 \\ 2x+y=1 \\ ax+3y=5 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin; a) çözümü nedir?, b) a' nın değeri kaçtır?

çözüm:

a) $\begin{array}{l} 5x+2y=1 \\ 2x+y=1 \end{array}$ denklemlerinden ikincinin her iki tarafını -2 ile çarpıp, birinci ile toplarsak:

$$\begin{array}{rl} & 5x+2y=1 \\ + & -4x-2y=-2 \\ \hline & x=\ -1 \end{array}$$

elde edilir. x= -1 değerini, birinci denklemde yerine yazarsak;

$$5x+2y=1 \Rightarrow 5.(-1)+2y=1$$

$$\Rightarrow 2y=6$$

$$\Rightarrow y=3$$

bulunur. O halde, sistemin çözümü (x, y)=(-1,3) noktası olarak bulunmuş olur.

b) Verilen denklem sisteminin çözümünü (x, y)=(-1,3) olarak bulduğumuza göre, bu çözüm değeri sistemde yer alan üç denklemi de sağlayacaktır. Yani, (x, y)=(-1,3) çözümü aynı zamanda üçüncü denklemin de doğrulandığı değer olduğundan, bu denklemde x yerine -1, y yerine 3 yazabiliriz. Dolayısıyla buradan,

$$ax+3y=5 \Rightarrow a.(-1)+3.3=5$$

$$\Rightarrow -a+9=5$$

$\Rightarrow$ a=4 olarak bulunmuş olur.