C) İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler:

$a,b,c \in R$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax^2+bx+c=0$$

şeklindeki denklemlere "ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem" denir.

Denklemi sağlayan x değerlerine "denklemin kökleri", tüm köklerin oluşturduğu kümeye "denklemin çözüm kümesi" , çözüm kümesini bulma işlemine de "denklemin çözümü(denklemi çözme)" denir.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü:

$ax^2+bx+c=0$ denkleminde, $\Delta = b^2-4ac$ ifadesine "denklemin diskriminantı" denir. Böyle ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin çözümünün olması Δ' nın işaretine bağlıdır.

I.Durum: $\Delta>0 \Rightarrow$ Denklemin birbirinden farklı iki reel kökü vardır. Bu kökler,

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \ , \ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

şeklindedir. Buradan çözüm kümesi; Ç.K= $\{x_1, x_2\}$ olarak ifade edilir.

II.Durum: $\Delta=0 \Rightarrow$ Denklemin birbirine eşit(çakışık) iki reel kökü vardır. Bu kökler,

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

şeklindedir. Buradan çözüm kümesi, Ç.K= $\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ olarak ifade edilir.

III. Durum: $\Delta<0 \Rightarrow$ Denklemin reel kökü yoktur. Yani, denklemin reel sayılarda çözüm kümesi; Ç.K= $\varnothing$'dir.

Örnek: $x^2+5x-14=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

çözüm: Verilen denklemde a=1, b=5 ve c=-14' tür. Buradan,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 5^2 - 4.1.(-14)$$

$$= 25 + 56$$

$$= 81 > 0$$

elde edilir. Δ=81>0 olduğundan, denklemin farklı iki reel kökü vardır. Bu kökler;

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{81}}{2.1} = \frac{-5+9}{2} = 2$$

ve

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{81}}{2.1} = \frac{-5-9}{2} = -7$$

olarak bulunur. O halde, denklemin çözüm kümesi, Ç.K= $\{-7, 2\}$ olarak elde edilir.

Örnek: $9x^2-6x+1=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

çözüm: Verilen denklemde a=9, b= -6, c=1'dir.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4.9.1 = 36 - 36 = 0$$

bulunur. Δ=0 olduğundan denkleminin birbirine eşit iki reel kökü vardır. Bu kökler;

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-6)}{2.9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

olarak bulunur. Buradan denklemin çözüm kümesi, Ç.K=$\left\{\frac{1}{3}\right\}$ olarak elde edilir.

Örnek: $x^2+x+2=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

çözüm: Verilen denklemde a=1, b=1, c=2'dir.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4.1.2 = 1 - 8 = -7 < 0$$

olduğundan, denklemin reel sayılarda çözümü yoktur. Yani, denklemin reel kökü yoktur. O halde, denklemin çözüm kümesi, Ç.K= $\varnothing$'dir.

Mutlak Değerli ve Köklü İfade Bulunduran Denklemlerin Çözümü:

$a \geq 0, a \in R$ olmak üzere,

$$|x| = a \Rightarrow x=a \text{ veya } x= -a$$

$$\Rightarrow \text{Ç.K}= \{-a,a\} \text{ şeklindedir.}$$

Örnek: $|x+1|=2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

çözüm:

$$|x+1| = 2 \Rightarrow x+1=2 \text{ veya } x+1= -2$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ veya } x=-3$$

$$\Rightarrow \text{Ç.K}=\{-3,1\}$$

Örnek: $2-|x+1|=5$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

çözüm:

$$2-|x+1|=5$$

$$|x+1|=-3$$

olur. Mutlak değerli bir ifadenin sonucu hiçbir zaman negatif olamaz. Bu nedenle soruda verilen denklemi sağlayan herhangi bir $x \in R$ yoktur. Dolayısıyla denklemin kökü yoktur. Bu nedenle denklemin çözüm kümesi, Ç.K= $\varnothing$'dir.

Örnek: $\sqrt{x-8}=10$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

çözüm: Verilen denklem, köklü ifade içerdiğinden, öncelikle karekökü kaldırmak için, denklemde her iki tarafın karesini alalım:

$$\sqrt{x-8}=10 \Rightarrow (\sqrt{x-8})^2=10^2$$

$$\Rightarrow x-8=100$$

$$\Rightarrow x=108$$

x=108 değerinin verilen denklemin kökü olması için köklü ifadeyi tanımlı yapması gerekir. Kök derecesi çift olan köklü ifadelerin tanımlı olabilmesi için kök içinin negatif olmaması gerekir. Yani;

$\sqrt[2n]{f(x)} \in R$ olması için $f(x) \geq 0$

olmalıdır. $\sqrt{x\text{-}8}$ ifadesinde x yerine 108 yazdığımızda kök içinin,

$$x-8=108-8=100>0$$

olduğunu görürüz. O halde, x=108 değeri denklemin bir köküdür. Buradan, Ç.K= $\{108\}$ olarak bulunmuş olur.

Örnek: $\sqrt[3]{x+1}+2=0$ denkleminin kökü kaçtır?

çözüm: Her $f(x) \in R$ için $\sqrt[2n+1]{f(x)} \in R$'dir.

$$\sqrt[3]{x+1}+2=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x+1}=-2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3=(-2)^3$$

$$\Rightarrow x+1=-8$$

$\Rightarrow x=-9$ olarak bulunur.