B)ÇARPANLARA AYIRMA VE ÖZDEŞLİKLER:

Çok terimli bir ifadeyi iki ya da daha çok ifadenin çarpımı şeklinde yazmaya "çarpanlara ayırma" denir.

Çarpanlara Ayırma Yöntemleri:

1)Ortak Çarpan Parantezine Alma:

Çok terimli ifadenin her teriminde ortak bir çarpan varsa, ifade onun parantezine alınarak çarpanlar bulunur.

Örnek:

$x^5+2x^3=x^3(x^2+2)$

$(x-2)x+(x-2)y=(x-2).(x+y)$

$x(x-y)-3(y-x)=x(x-y)+3(x-y)=(x-y).(x+3)$

$(a+2)^3-2(a+2)^2=(a+2)^2.(a+2-2)=(a+2)^2.a$

2) Gruplandırma Yöntemi:

Verilen çok terimli ifadenin her teriminde ortak çarpan yoksa, terimler ikişerli ya da daha fazla gruplara ayrılarak bu gruplar içerisinde ortak çarpan bulunmaya çalışılır.

Örnek: ax+ay+az+bx+by+bz ifadesini çarpanlarına ayırınız.

çözüm:

1.yol: Verilen çok terimli ifadede a' lı terimleri bir grup, b' li terimleri diğer grup olarak alırsak:

$ax+ay+az+bx+by+bz=a(x+y+z)+b(x+y+z)$

elde edilir. Yani, verilen çok terimli ifade, iki terimli ifadeye dönüşmüş olur. Bu durumdaki yazılışta da (x+y+z) ifadelerinin terimlerdeki ortak çarpan olduğunu görüyoruz. Tekrar ortak çarpan parantezine alarak devam edersek:

$a(x+y+z)+b(x+y+z)= (x+y+z).(a+b)$

şeklinde çarpanları belirlemiş oluruz.

2.yol: Verilen çok terimli ifadede x’ li, y’ li ve z’ li terimleri ayrı gruplar olarak düşünürsek, x’ li terimlerde x ortak parantezine, y’ li terimlerde y ortak parantezine, z’ li terimlerde z ortak parantezine alarak işleme devam edebiliriz.

$$ax+ay+az+bx+by+bz=x(a+b)+y(a+b)+z(a+b)$$

olur. Burada da (a+b) ifadelerinin ortak olduğunu görüp tekrar ortak çarpan parantezine alırsak:

$$x(a+b)+y(a+b)+z(a+b)=(a+b).(x+y+z)$$

şeklinde çarpanları belirlemiş oluruz.

3)Özdeşliklerden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma:

Bazı temel özdeşlikler şunlardır:

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$; Tam Kare

$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$; Tam Kare

$x^2-y^2=(x-y).(x+y)$; İki Kare Farkı

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$; Toplamın Küpü

$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$; Farkın Küpü

$x^3+y^3=(x+y).(x^2-xy+y^2)$; İki Küp Toplamı

$x^3-y^3=(x-y).(x^2+xy+y^2)$; İki Küp Farkı

Örnekler: Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^2+6x+9=x^2+2.3x+3^2=\left(x+3\right)^2$

b) $4x^2-12x+9=(2x)^2-2.2x.3+3^2=(2x-3)^2$

c) $25x^2-16y^2=(5x)^2-(4y)^2=(5x-4y).(5x+4y)$

d) $\left(x+2\right)^2-\left(y-1\right)^2=\left[\left(x+2\right)-\left(y-1\right)\right].\left[\left(x+2\right)+\left(y-1\right)\right]=\left(x+2-y+1\right).\left(x+2+y-1\right)$
$=\left(x-y+3\right).\left(x+y+1\right)$

e) $x^3-6x^2+12x-8=x^3-3.x^2.2+3.x.2^2-2^3=\left(x-2\right)^3$

f) $27x^3+27x^2+9x+1=\left(3x\right)^3+3.\left(3x\right)^2.1+3.3x.1^2+1^3=\left(3x+1\right)^3$

g) $8x^3-27y^3=\left(2x\right)^3-\left(3y\right)^3=\left(2x-3y\right).\left[\left(2x\right)^2+\left(2x\right).\left(3y\right)+\left(3y\right)^2\right]$
$=\left(2x-3y\right).\left(4x^2+6xy+9y^2\right)$

h) $a^3+125b^3=a^3+\left(5b\right)^3=\left(a+5b\right).\left[a^2-a.\left(5b\right)+\left(5b\right)^2\right]=\left(a+5b\right).\left(a^2-5ab+25b^2\right)$

KURAL: ax^2+bx+c üç terimlisinin çarpanlarına ayrılması:

ax^2+bx+c biçimindeki ifadeler $\Delta=b^2-4ac\geq 0$ ise çarpanlarına ayrılabilir.

1.Durum: a=1 ise x^2+bx+c cebirsel ifadesi elde edilir. Bu ifadeyi çarpanlarına ayırmak için öncelikle x'in azalan kuvvetlerine göre terimleri yazarız. Daha sonra c sayısını öyle iki m ve n sayısının çarpımı olarak düşünürüz ki; m ve n'nin çarpımları c'yi verirken, toplamları da ortadaki sayı olan b'yi vermelidir. Bu şekilde m ve n sayılarını bulduğumuzda, x^2+bx+c ifadesini çarpanlarına ayırmış olarak;

$x^2+bx+c=x^2+\left(m+n\right)x+m.n=\left(x+m\right).\left(x+n\right)$ şeklinde yazabiliriz.

$x^2+bx+c=(x+m).(x+n)$; m.n=c, m+n=b

x m
x n

Örnekler: Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^2+7x+10=(x+5).(x+2)$; $5.2=10$ ve $5+2=7$

$$\begin{array}{ll} x & +5 \\ x & +2 \end{array}$$

b) $x^2+5x-6=(x+6).(x-1)$; $6.(-1)=-6$ ve $6-1=5$

$$\begin{array}{ll} x & +6 \\ x & -1 \end{array}$$

2.Durum: $a \neq 1$ ise ax^2+bx+c ifadesini çarpanlarına ayırmak için, yine öncelikle ifadeyi x' in azalan kuvvetlerine göre yazarız. Sonra birinci ve üçüncü terimin her birini öyle iki ifadenin çarpımı olarak düşünürüz ki; bu ifadeleri çapraz çarpıp topladığımızda ortadaki terimi bulmalıyız.

Bu şekilde bulduğumuz uygun değerleri (varsa) daha sonra karşılıklı olarak parantezlere alarak yazdığımızda ax^2+bx+c ifadesini çarpanlarına ayırmış oluruz.

$ax^2+bx+c=(mx+p).(nx+q)$; $mxq+nxp=bx$

$$\begin{array}{ll} mx & p \\ nx & q \\ \hline \multicolumn{2}{c}{mxq+nxp=bx} \end{array}$$

Örnekler: Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $2x^2+5x-7=(2x+7).(x-1)$

$$\begin{array}{ll} 2x & +7 \\ x & -1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-2x+7x=+5x} \end{array}$$

b) $3x^2-4x-7=(3x-7).(x+1)$

$$\begin{array}{ll} 3x & -7 \\ x & +1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{3x-7x=-4} \end{array}$$

KESİRLİ CEBİRSEL İFADELER:

A ve B $(B \neq 0)$ herhangi iki cebirsel ifade olmak üzere $\frac{A}{B}$ şeklindeki ifadelere "kesirli cebirsel ifade" denir.

Bir kesirli cebirsel ifadenin sayısal değeri, ifadede bulunan değişkenler için verilen sayısal değerlerin yerlerine yazılmasıyla elde edilen sonuçtur.

Örnek: $\frac{3x-5}{x^2+2x+2}$ kesirli cebirsel ifadesinin x=2 için sayısal değerini bulunuz.

çözüm: x=2 için: $\frac{3x-5}{x^2+2x+2}=\frac{3.2-5}{2^2+2.2+2}=\frac{1}{10}$ bulunur.

Örnek: $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ifadesinin x=0 için sayısal değerini bulunuz.

çözüm: x=0 için: $\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{0^2+1}{0^2-1}=\frac{1}{-1}=-1$ bulunur.

Uyarı: Bu cebirsel ifadenin x=1 ve x= -1 için sayısal değeri yoktur. Çünkü, bu değerler için cebirsel ifadenin paydası $x^2-1=1^2-1=0$ ve $x^2-1=(-1)^2-1=0$ olacağından sayısal değer tanımsız olur.

NOT: Bir kesirli cebirsel ifadenin pay ve paydasını sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak veya bölmek, verilen kesrin değerini değiştirmez. Kesrin pay ve paydasını sıfırdan farklı bir ifade ile çarpmak, verilen kesri "genişletmek" demektir. Kesirli ifadenin pay ve paydasını sıfırdan farklı bir ifadeye bölmek, kesri "kısaltmak(sadeleştirmek)" demektir.

$\frac{A}{B}$, $B \neq 0$ bir kesirli cebirsel ifade ve C de sıfırdan farklı bir cebirsel ifade olmak üzere,

$\frac{A}{B} \equiv \frac{A.C}{B.C} \equiv \frac{A:C}{B:C}$ denkliği vardır.

Örnek: $\frac{(x^2-1).(x+2).(x-3)}{(x-1).(x+1).(x^2+1)}$ ifadesini x-1 ile sadeleştiriniz.

çözüm:

$$\frac{\left(x^2-1\right).\left(x+2\right).\left(x-3\right)}{\left(x-1\right).\left(x+1\right).\left(x^2+1\right)}=\frac{\left[\left(x-1\right).\left(x+1\right).\left(x+2\right).\left(x-3\right)\right]:\left(x-1\right)}{\left[\left(x-1\right).\left(x+1\right).\left(x^2+1\right)\right]:\left(x-1\right)}=\frac{\left(x+1\right).\left(x+2\right).\left(x-3\right)}{\left(x+1\right).\left(x^2+1\right)}$$ bulunur.

Örnek: $\frac{x^2+x+1}{x-1}$ kesrini $x-1$ ile genişletiniz.

çözüm: $\frac{x^2+x+1}{x-1}=\frac{\left(x^2+x+1\right).\left(x-1\right)}{\left(x-1\right).\left(x-1\right)}=\frac{x^3-x^2+x^2-x+x-1}{\left(x-1\right)^2}=\frac{x^3-1}{\left(x-1\right)^2}$ elde edilir.

SADELEŞTİRME:

Bir kesirli ifade sadeleştirilirken; önce pay ve payda çarpanlarına ayrılır. Eğer ortak çarpanlar varsa, pay ve payda ortak çarpanlara bölünür.

Örnek: $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ ifadesini sadeleştiriniz.

çözüm: $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\frac{\left(x-1\right).\left(x-2\right)}{\left(x-2\right).\left(x+2\right)}=\frac{x-1}{x+2}$

Örnek: $\frac{x^3-6x^2+8x}{6x^4-24x^2}$ ifadesini sadeleştiriniz.

çözüm: $$\frac{x^3-6x^2+8x}{6x^4-24x^2}=\frac{x\left(x^2-6x+8\right)}{6x^2\left(x^2-4\right)}=\frac{x\left(x-4\right).\left(x-2\right)}{6x^2\left(x-2\right).\left(x+2\right)}=\frac{\frac{x\left(x-4\right).\left(x-2\right)}{x\left(x-2\right)}}{\frac{6x^2\left(x-2\right).\left(x+2\right)}{x\left(x-2\right)}}=\frac{x-4}{6x\left(x+2\right)}$$

NOT: Kesirli cebirsel ifadelerde dört işlem, kesirli sayılarda olduğu gibi yapılır.

Örnek: $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+1}=?$

çözüm: $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{\left(x+1\right).\left(x-2\right)}+\frac{x-2}{\left(x-2\right).\left(x+1\right)}=\frac{x+1+x-2}{\left(x+1\right).\left(x-2\right)}=\frac{2x-1}{\left(x+1\right).\left(x-2\right)}$

$(x+1)$ $(x-2)$

Örnek: $\frac{x^2-1}{x^3-1}.\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{(x-1).(x+1)}{(x-1).(x^2+x+1)}.\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{1}{x^2+x+1}.\frac{x^2+x+1}{1}=1$

Örnek: $\frac{x^2-8x-9}{x^2-17x+72}.\frac{x^2-25}{x^2-1}:\frac{x^2-6x+5}{x^2-9x+8}=\frac{x^2-8x-9}{x^2-17x+72}.\frac{x^2-25}{x^2-1}.\frac{x^2-9x+8}{x^2-6x+5}$

$$=\frac{(x-9).(x+1)}{(x-9).(x-8)}.\frac{(x\text{-}5).(x+5)}{(x-1).(x+1)}.\frac{(x-8).(x-1)}{(x-5).(x-1)}$$

$$=\frac{x+5}{x-1}$$

Örnek: $\left(\frac{a+5}{5-a}\right):\left(1+\frac{10}{a-5}\right)=\left(\frac{a+5}{5-a}\right):\left(\frac{a\text{-}5}{a-5}+\frac{10}{a-5}\right)$

$$=\left(\frac{a+5}{5-a}\right):\left(\frac{a-5+10}{a-5}\right)$$

$$=\frac{a+5}{5-a}:\frac{a+5}{a-5}=\frac{a+5}{-(a-5)}.\frac{a-5}{a+5}=-1$$

Örnek: $\frac{x^3-x^2-x+y}{x^2-xy+x-y}:\frac{xy+x-y-1}{xy+x}=\frac{x^2(x-y)-(x-y)}{x(x-y)+(x-y)}.\frac{x(y+1)}{x(y+1)-(y+1)}$

$$=\frac{(x-y).(x^2-1)}{(x-y).(x+1)}.\frac{x(y+1)}{(y+1).(x-1)}$$

$$=\frac{(x-1).(x+1).x}{(x+1).(x-1)}$$

$$=x$$