Toplam Olasılık Prensibi

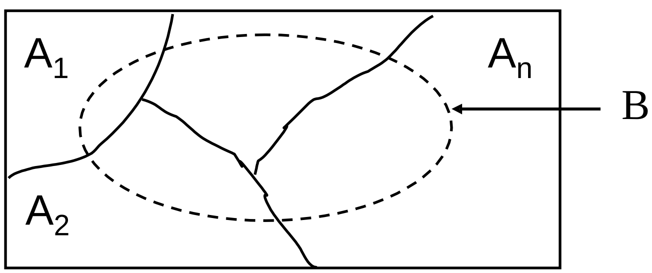
A_1, A_2, …, A_n karşılıklı kapsamayan ve birlikte tamamlayan olaylar kümesi olsun:

$$A_k A_j = 0 \qquad k \neq j$$

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = S \quad \text{ise} \qquad \sum_{j=1}^{n} \Pr[A_j] = 1$$

B, S içinde herhangi bir olay ise

$$\Pr[B] = \Pr[BA_1] + \Pr[BA_2] + \ldots + \Pr[BA_n]$$



Olayların Bağımsızlığı

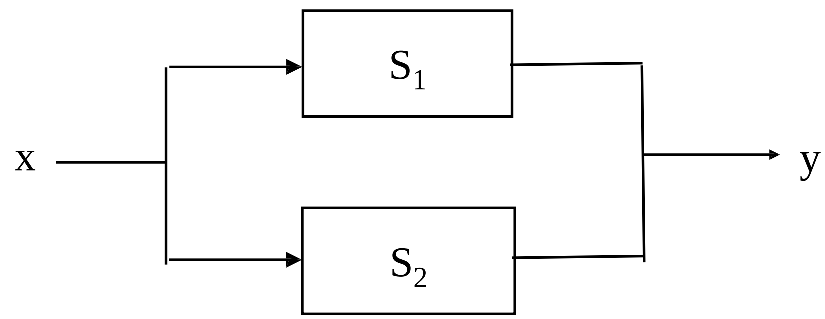
Eğer

$$Pr[A_1 A_2] = Pr[A_1]\, Pr[A_2]$$

ise A_1 ve A_2 gibi iki olayın istatiksel olarak bağımsız olduğu söylenir.

Sistem Güvenilirlik Hesaplamaları

Paralel Bağlı Anahtarlar



$A_1 = \{S_1 \text{ bozulması}\}$, $\Pr[A_1] = p$, $\Pr[A_1^c] = 1 - p = q$

$A_2 = \{S_2 \text{ bozulması}\}$, $\Pr[A_2] = p$, $\Pr[A_2^c] = 1 - p = q$

$F = \{x \text{ ve } y \text{ arasında bağlantı yok}\} = A_1 A_2$

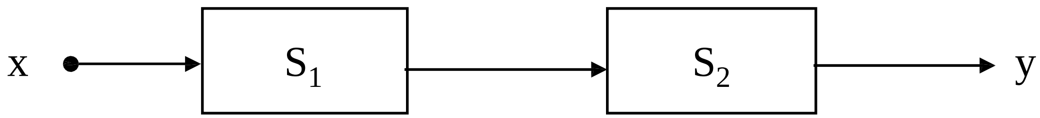
Bağlantı kopması olasılığı:

$$\Pr[F] = \Pr[A_1 A_2] = \Pr[A_1]\Pr[A_2] \qquad A_1 \text{ ve } A_2 \text{ bağımsız}$$

$$= p^2$$

Sistem Güvenilirlik Hesaplamaları

Seri Bağlı Anahtarlar



Anahtar bozulmalarının istatiksel olarak bağımsız olduğu varsayılıyor; bozulma açık devreye yol açar.

$$F = \{ \text{ x ve y arasında bağlantı yok } \} = A_1 + A_2$$

Bağlantı kopması olasılığı:

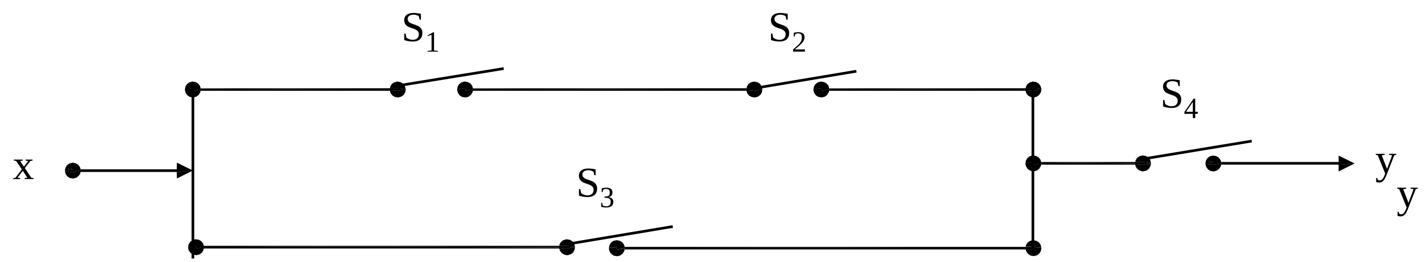
$$\Pr[F] = \Pr[A_1 + A_2] = \Pr[A_1] + \Pr[A_2] - \Pr[A_1 A_2]$$

$$= \Pr[A_1] + \Pr[A_2] - \Pr[A_1]\Pr[A_2] \qquad A_1 \text{ ve } A_2 \text{ bağımsız}$$

$$= p + p - p^2 = 2p - p^2$$

Örnek:

Aşağıda gösterilen anahtar şebekesinde:



A_k = {S_k anahtarının bozulması}, k = 1,2,3,4 $\Pr[A_k] = p$

(a) x den y'ye bağlantı olması olasılığını bulun.

F = {x ve y arasında bağlantı yok} = $(A_1 + A_2)A_3 + A_4$ olur

Bu durumda bağlantı kopması olasılığı

$$\Pr[F] = \Pr[(A_1 + A_2)A_3 + A_4] = \Pr[A_1A_3 + A_2A_3] + \Pr[A_4] - \Pr[A_1A_3A_4 + A_2A_3A_4]$$

$$= \Pr[A_4] + \Pr[A_1A_3] + \Pr[A_2A_3] - \Pr[A_1A_2A_3]$$

$$- \Pr[A_1A_3A_4] - \Pr[A_2A_3A_4] + \Pr[A_1A_2A_3A_4]$$

$$= p + 2p^2 - 3p^3 + p^4$$ şeklinde bulunur

Bağlantı olması olasılığı ise

$$\Pr[\text{bağlantı var}] = 1 - \Pr[F] = 1 - p - 2p^2 + 3p^3 - p^4$$ olur.

(b) İstenen olasılığı p’nin fonksiyonu olarak hesaplayın:

Pr[bağlantı var] = 1 - Pr[F] = 1 - p - 2p2 + 3p3 - p4

p	1 − Pr[F]
0.1	0.8829
0.01	0.98980299
0.001	0.998998002999
0.0001	0.999899980003

Tekrarlanan Bağımsız Denemeler (Bernoulli Denemeleri)

Rastgele deney, E, E_i alt olaylarından oluşmaktadır,:

- Bütün alt deneylerin örnek uzayı, S_i olsun
- Alt deney olayları karşılıklı olarak bağımsızdır:

  $Pr[A_1A_2A_3...A_n] = Pr[A_1]Pr[A_2]Pr[A_3]...Pr[A_n]$,

  burada A_i , S_i içinde bir olaydır

  - E'nin örnek uzayı $S = S_1 \times S_2 \times S_3 \times \ldots \times S_n$ olur.

Sayma Metodları ve Olasılık

Olasılığın belirlenmesi

$$\Pr[\mathrm{A}_1] = \frac{\mathrm{A}_1 \text{ olayının çıktılarının sayısı}}{\begin{array}{c}\text{Deneyin çıktılarının sayısı} \\ \text{(örnek uzayın eleman sayısı)}\end{array}}$$

Çarpım kuralı:

n çıktılı bir deneyi ele alalım; *r* defa takrar edelim

Toplam çıktı sayısı aşağıdaki şekilde bulunur

$$N_r^n = n \times n \times \cdots \times n = n^r$$

genel durumda olur.

$$N_r^{n_i} = n_1 n_2 \cdots n_r = \prod_{i=1}^{r} n_i$$

<u>Örnek</u>:

Bir zarı 4 kez arka arkaya atalım. Toplam çıktı sayısı

$$N_4^6 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$$

<u>Örnek</u>:

29 harfli alfabemizle kaç tane 5 harfli kelime yazılabilir? Harf tekrarı olabilir ve kelimeler anlamlı olmak zorunda değil.

$$N_5^{29} = 29^5 = 20.511.149$$

<u>Örnek</u>:

Bir kelime, bir sayı, bir kelime kullanarak kaç tane 3 karakterli değişken ismi yazılabilir? (örnek, A2C).

$$N_3^{n_i} = 29 \cdot 10 \cdot 29$$

PERMUTASYONLAR (geri koymasız çarpım)

n tane ayrık nesnenin içinden sırasına dikkat ederek r tane nesne seçiliyor

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}, \quad , \quad r \leq n$$

Özel durum: $r = n$ ise: $P_n^n = n!$

Örnek:

Türkçe alfabeyi kullanarak harfler tekrar kullanılmayacak şekilde 5 harfli kaç tane kelime yazılabilir? Kelimeler anlamlı olmak zorunda değil.

$$P_5^{29} = \frac{29!}{(29-5)!}$$

$$= \frac{29!}{24!} = 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = 14{,}250{,}600$$

KOMBINASYONLAR (yerine koymasız, sırasız)

n tane ayrık nesnenin içinden sırasına dikkat edilmeyerek *r* tane nesne seçiliyor.

$$C_r^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots(1)} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Binom katsayısı "n *den* r *tane*"

Örnek:

$\{a, b, c, d, e\}$ gibi eşit kapasiteye sahip 5 bilgisayar olsun.

- *Permutasyonlar*: Biri sunucu diğeri grafik işlemcisi olarak iki bilgisayar seçilsin. Bu durumda mümkün seçimler nelerdir?

ab ba ac ca ad da ae ea bc cb bd db be eb cd dc ce ec de ed

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = 5 \cdot 4 = 20 \qquad \text{“ab} \neq \text{ba”}$$

- *Kombinsyonlar*: Her ikiside grafik işlemcisi olarak çalışacak iki bilgisayar seçilsin. Bu durumda mümkün seçimler nelerdir?:

ab ac ad ae bc bd be cd ce de

$$C_4^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \qquad \text{“ab = ba”}$$

Örnek:

5 tane masa üstü bilgisayar alınması planlanmaktadır. Satıcıda istenen konfigürasyonda 10 ithal 15 tane yerli üretim bilgisayar bulunmaktadır.

(a) Bu 25 bilgisayar içinden rastgele 5'inin seçildiği varsayımıyla şeçilenlerden 3 tanesinin yerli üretim olması olasılığı nedir?

- Örnek uzay

  S = { n = 25 bilgisayardan r = 5 'li bir kombinasyon seçiliyor}

$$N_S = C_5^{25} = \frac{25!}{5!(25-5)!}$$

- İstenen olay A = {seçilen 5'ten tam 3 tanesinin yerli olması}

$$N_A = C_3^{15} C_2^{10} = \frac{15!\ 10!}{3!(15-3)!\ 2!(10-2)!}$$

- Seçilenlerden 3'ünün yerli bilgisayar olma olasılığı

$$\Pr[A] = \frac{N_A}{N_S} = 0.3854$$

(b) Bu 25 bilgisayar içinden rastgele 5'inin seçildiği varsayımıyla seçilenlerden en azından 1 tanesinin ithal olması olasılığı nedir??

- B = {seçilen 5 bilgisayardan hiçbirinin ithal olmaması} olayı olsun
- İstenen olay C = {seçilen 5'ten bir ya da daha fazlasının ithal olması}
- $B^C = C$, olduğundan Pr[C] = 1 − Pr[B] yazılabilir

$$\Pr[B] = \frac{N_B}{N_S} = \frac{C_5^{15} C_0^{10}}{C_5^{25}} \cong 0.05652$$

$$\Pr[C] = 1 - \Pr[B] = 0.94348$$

Örnek:

İçinde 25 tane modem olan bir kutudaki modemlerden 5 tanesinin bozuk olduğu biliniyor.

Bu kutudan rastgele 6 tane modem alınıyor ve test ediliyor. Seçilenlerden 2 tanesinin bozuk olma olasılığı nedir?

- Örnek uzay: S = { n = 25 bilgisayardan r = 6 ‘lı bir kombinasyon seçiliyor}
- Olay: A = {seçilen 6 taneden 2 tanesi bozuk}
- S’deki çıktı sayısı:

$$N_S = C_6^{25} = \frac{25!}{6!(25-6)!}$$

- seçilen 6 modemden 2 tanesinin bozuk (kutudaki 5 bozuk modemden 2 sinin alınmış olması) ve 4 tanesinin sağlam (sağlam olan 20 modemden 4 ünün alınmış olması) olayına bakıyoruz.

– *A* olayının çıktılarının sayısı:

$$N_A = C_2^5 C_4^{20} = \frac{5!\ 20!}{2!(5-2)!\ 4!(20-4)!}$$

– Seçilen 6 modemden 2 tanesinin bozuk olması olasılığı:

$$\Pr[\mathrm{A}] = \frac{N_A}{N_S} = \frac{C_2^5 C_4^{20}}{C_5^{25}} \cong 0.2736$$