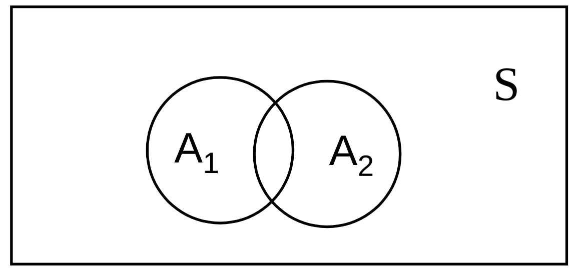
Şartlı Olasılık

Bir olayın (A_1) olma olsılığı, başka bir olayın (A_2) gerçekleştiğinin bilinmesine bağlıysa;

$$\Pr\left[A_1 | A_2\right] = \frac{\Pr[A_1\ A_2]}{\Pr[A_2]}$$



$\Pr[A_1 | A_2]$ “A_2 verildiğinde (gerçekleştiğinde) A_1 in olasılığı” şeklinde okunur

Eğer A_1 ve A_2 bağımsız ise

$$\Pr\left[A_1 | A_2\right] = \frac{\Pr[A_1\ A_2]}{\Pr[A_2]} = \frac{\Pr[A_1]\Pr[A_2]}{\Pr[A_2]} = \Pr[A_1]$$

Örnek:

Rastgele oluşmuş 3 lü binary sayı dizilerinin kümesini ele alalım.

Örnek uzay: S = {000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111}

İlk bitin 1 olması durumunda 0’dan çok 1 olma olasılığı nedir?

- iki olayı tanımlayalım:

  A_1 = {0’dan çok 1 olması} = {011, 101, 110, 111}

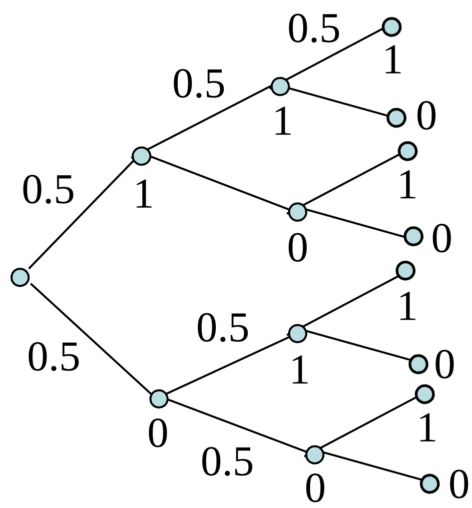
  A_2 = {ilk bit 1} = {100, 101, 110, 111}

- kesişim:

  A_1A_2 = {101, 110, 111}

Örnek devam:

Ağaç diyagramı



Örnek uzayı
111
110
101
100
011
010
001
000

- Örnek uzaydaki 8 olay da 1/8 olasılığına sahip, öyleyse

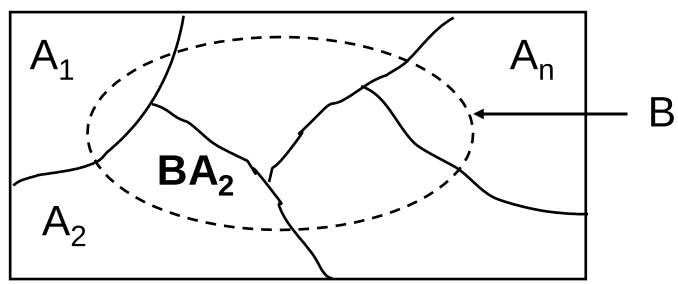
$$\Pr[A_2] = \frac{4}{8} \quad \text{ve} \quad \Pr[A_1 A_2] = \frac{3}{8}$$

- Şartlı olasılık şu şekilde elde edilir:

$$\Pr\left[A_1 | A_2\right] = \frac{\Pr[A_1\ A_2]}{\Pr[A_2]} = \frac{3/8}{4/8} = \frac{3}{4}$$

Toplam Olasılık Prensibi (tekrar)

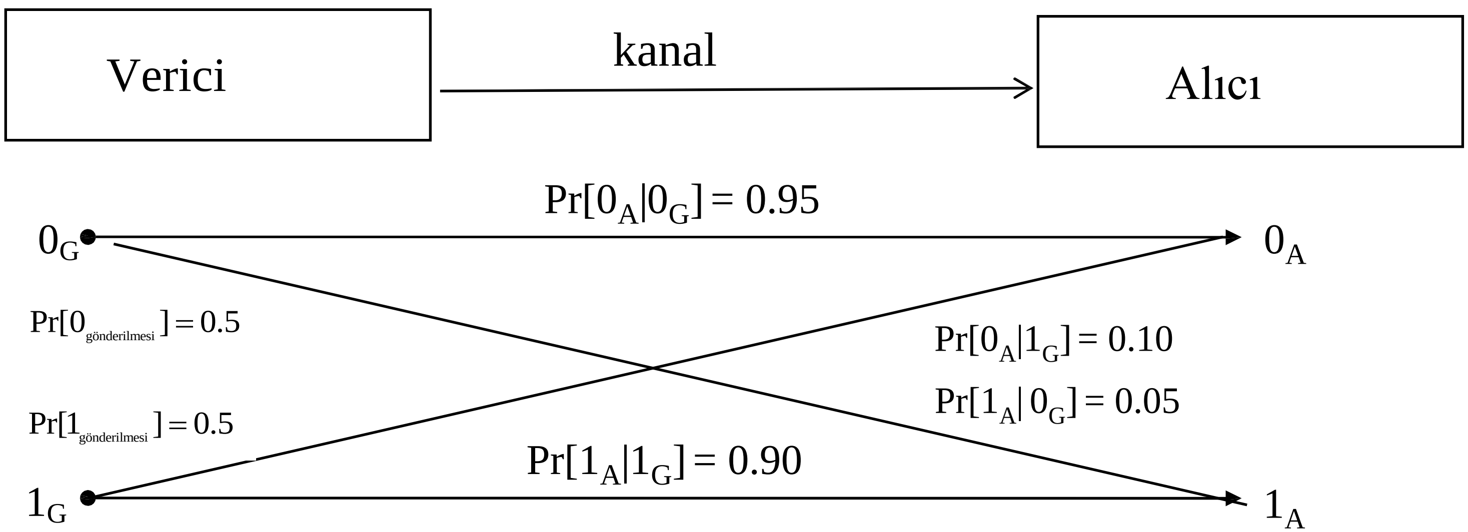
A_1, A_2, …, A_n karşılıklı kapsamayan ve birlikte tamamlayan olaylar kümesi olsun. B, S içinde bir olay olsun.

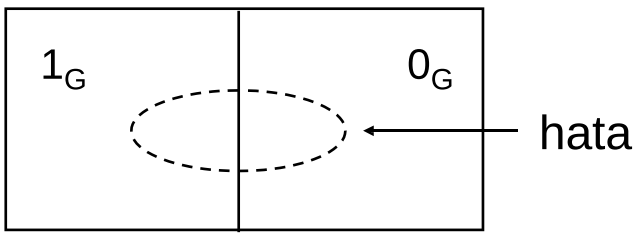


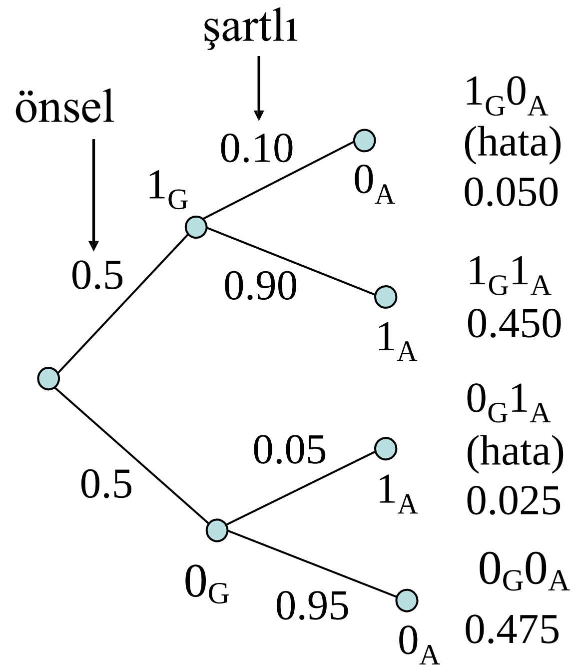
Burdan

$$\begin{aligned}\Pr[\mathrm{B}] &= \Pr[\mathrm{BA}_1] + \Pr[\mathrm{BA}_2] + \cdots + \Pr[\mathrm{BA}_n] \\ &= \Pr[\mathrm{B}|\mathrm{A}_1]\Pr[\mathrm{A}_1] + \cdots + \Pr[\mathrm{B}|\mathrm{A}_n]\Pr[\mathrm{A}_n] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[\mathrm{B}|\mathrm{A}_i]\Pr[\mathrm{A}_i]\end{aligned}$$

Örnek: Binary İletişim Hattı







$$\Pr[\text{hata} \mid 1_G] = \Pr[0_A \mid 1_G] = 0.10$$

$$\Pr[\text{hata} \mid 0_G] = \Pr[1_A \mid 0_G] = 0.05$$

$$\Pr[\text{hata}] = \Pr[\text{hata} \mid 1_G]\Pr[1_G] + \Pr[\text{hata} \mid 0_G]\Pr[0_G]$$
$$= 0.10 \cdot 0.50 + 0.05 \cdot 0.50 = 0.075$$

Şartlı Olasılık (devam)

Şartlı olasılığın tanımından,

$$\Pr\left[A_1|A_2\right]=\frac{\Pr[A_1\ A_2]}{\Pr[A_2]} \quad \text{veya} \quad \Pr[A_1\ A_2]=\Pr[A_1|A_2]\ \Pr[A_2]$$

$$\Pr\left[A_2|A_1\right]=\frac{\Pr[A_1\ A_2]}{\Pr[A_1]} \quad \text{veya} \quad \Pr[A_1\ A_2]=\Pr[A_2|A_1]\ \Pr[A_1]$$

$$\therefore \quad \Pr[A_1|A_2]\ \Pr[A_2]=\Pr[A_2|A_1]\ \Pr[A_1]$$

buradan

$$\boxed{\Pr[A_2|A_1]=\frac{\Pr[A_1|A_2]\ \Pr[A_2]}{\Pr[A_1]}}$$

Bayes Kuralı (Teoremi)

A_1, A_2, …, A_n karşılıklı kapsamayan ve birlikte tamamlayan olaylar kümesi olsun. Bu durumda ,

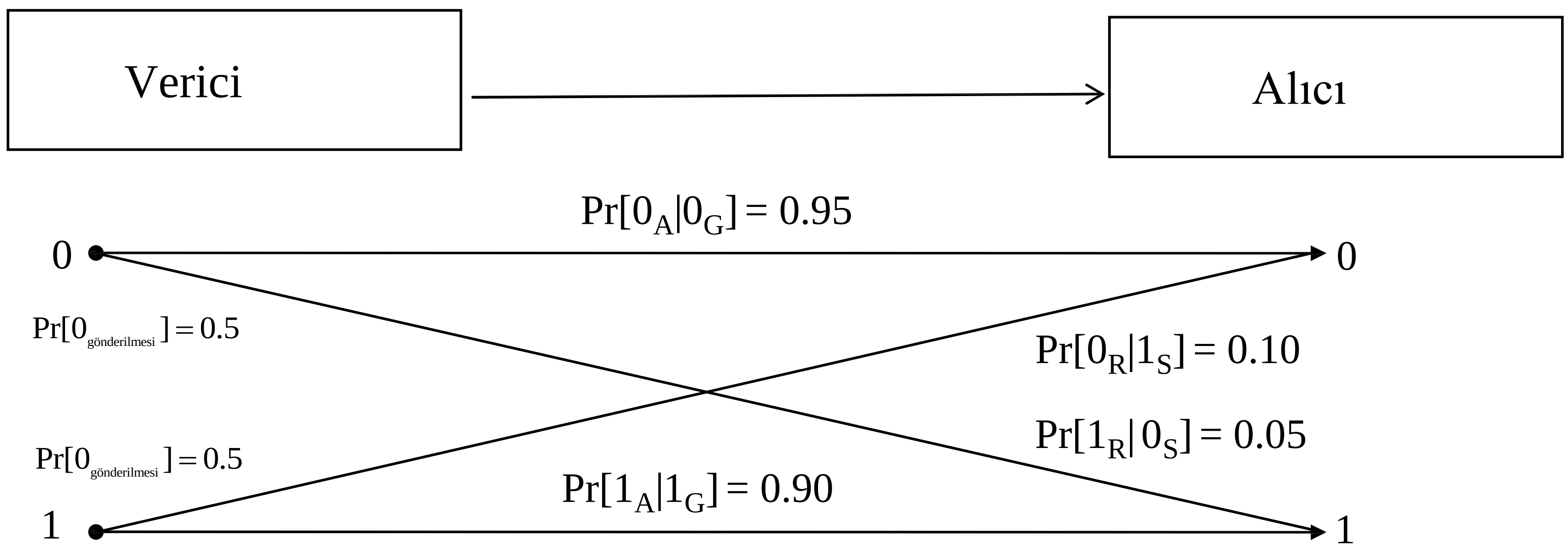
$$\Pr[A_j | B] = \frac{\Pr[B | A_j]\ \Pr[A_j]}{\Pr[B]}$$

veya, toplam olasılık prensibini uygularsak

$$\Pr[A_j | B] = \frac{\Pr[B | A_j]\ \Pr[A_j]}{\sum_{k=1}^{n} \Pr[B | A_k]\ \Pr[A_k]}$$

Buna Bayes kuralı denir.

<u>Örnek</u>: Binary Haberleşme Kanalı



Ters olasılık, $P[1_G\,|1_A]$ nedir?.

$$\Pr[1_G \mid 1_A] = \frac{\Pr[1_A \mid 1_G]\Pr[1_G]}{\Pr[1_A]}$$

$$= \frac{\Pr[1_A \mid 1_G]\Pr[1_G]}{\Pr[1_A \mid 1_G]\Pr[1_G] + \Pr[1_A \mid 0_G]\Pr[0_G]}$$

$$= \frac{0.45}{0.45 + 0.025} = 09474$$

Örnek:

Elimizde 3 kutu entegre devre (ED) olsun:

1.kutuda 1500 ED vardır ve %10'u bozuktur;

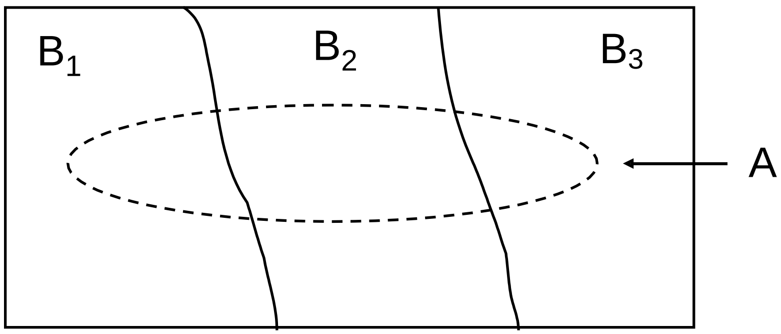
2.kutuda 2000 ED vardır ve %20'si bozuktur; ve

3.kutuda 3000 ED vardır ve %16'sı bozuktur.

Bu 3 kutudan birini rastgele seçiniz ve seçtiğiniz bu kutudan rastgele bir ED seçiniz.

(a) seçilen ED'nin bozuk olma olasılığı nedir?

(a) seçilen ED'nin bozuk olma olasılığı nedir?



Tanım: A = "seçilen ED bozuk" ,

B_i = "ED i. kutudan"

- Toplam olasılık prensibinden

$$\Pr[A] = \Pr[A|B_1]\Pr[B_1] + \Pr[A|B_2]\Pr[B_2] + \Pr[A|B_3]\Pr[B_3]$$

$$= 0.10\frac{1}{3} + 0.20\frac{1}{3} + 0.16\frac{1}{3} = 0.1533$$

(b) Seçilen ED bozuksa bunun 3. kutudan gelmiş olma olasılığı nedir?

Bayes teoreminden

$$\Pr[B_3|A] = \frac{\Pr[A|B_3]\Pr[B_3]}{\Pr[A]}$$

$$= \frac{0.16\frac{1}{3}}{\frac{0.46}{3}} = \frac{0.16}{0.46} = 0.3478$$

(c) Bütün ED'ler tek bir kutuda karışmış olarak bulunuyorsa, rastgele seçilen bir ED'nin bozuk olma ihtimali nedir?

Binom Olasılık Kanunu

n elemanlı binary dizisi olsun values:

$$\Pr[1] = p, \;\; \Pr[0] = 1 - p = q.$$

Tanım: A = {*n* elemanlı dizide *r* tane 1’in olması}

n elemanlı dizide *r* tane 1’in oluşma sayısı binom katsayısı ile bulunur C_r^n

- bütün bu dizilerde *r* tane 1 ve *n* – *r* tane 0 vardır.
- Bu dizilerin gerçekleşme olasılığı $p^r q^{n-r}$ dir.

Bu durumda A olayının olma olasılığı: $\Pr[\mathrm{A}] = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$

<u>Örnek</u>:

Kanal bit hata oranı p = 10^{-2} olan bir modem bağlantısı olsun. Datanın 100 bit'lik paketler halinde gittiğini biliyorsak (a) 1 bit'in hatalı olma olasılığı nedir? (b) 3 bit'in hatalı olma olasılığı nedir?

(a) $\Pr[1 \text{ bit hatalı}] = \binom{100}{1} 0.01^{1}\ 0.99^{99} = 0.3697$

(b) $\Pr[3 \text{ bit hatalı}] = \binom{100}{3} 0.01^{3}\ 0.99^{97} = 0.060999$

<u>Örnek</u>:

Kanal bit hata oranı p = 10^{-3} olan bir sistem olsun. Verici her bir biti 3 kez gönderiyor ve alıcı 3 defada en çok kendine ulaşan biti almış kabul ediyor. Bu durumda bit hatası nedir?

(a) her bir iletim n = 3 olan bir Bernoulli denemesidir.

Tanım: A = {3 denemede 2 veya daha fazla bit hatası}

$$\Pr[\text{hata}] = \Pr[\mathrm{A}] = \Pr[r \geq 2]$$

$$= \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 + \binom{3}{3} p^3$$

$$= 3\times 10^{-6}(1-10^{-3}) + 10^{-9} \cong 3\times 10^{-6}$$

(b) n = 5 olması durumunda sonuç ne olur?

Tanım: A = {5 denemede 3 veya daha fazla bit hatası}

$$\Pr[\text{hata}] = \Pr[\text{A}] = \Pr[r \geq 3]$$

$$= \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + \binom{5}{5} p^5 \quad p^5$$

$$\cong 9.985 \times 10^{-9}$$

Örnek:

10 basamaklı binary sayı dizisinde Pr[1] = 0.52 olsun.

(a) bu binary sayıda 8 veya daha fazla 1 olması olasığı nedir?

Tanım: A = {10 bitlik dizide 8 veya daha fazla 1 olması}

$$\Pr[A] = \binom{10}{8} \cdot 0.52^8 \cdot 0.48^2 + \binom{10}{9} \cdot 0.52^9 \cdot 0.48 + \binom{10}{10} \cdot 0.52^{10}$$

$$= 45 \cdot 0.52^8 \cdot 0.48^2 + 10 \cdot 0.52^9 \cdot 0.48 + 0.52^{10} \cong 0.0702161458426$$

(b) 6 tane 1 olması olasılığı nedir?

Tanım: A = {10 bitlik dizide 6 tane 1 olması}

$$\Pr[A] = \binom{10}{6} \cdot 0.52^6 \cdot 0.48^4 = 210 \cdot 0.52^6 \cdot 0.48^4 \cong 0.220396303407$$

Geometrik Olasılık Kanunu

Bir alt deneyde A istenen olay olsun ve

$$\Pr[A] = p, \qquad \Pr[A^C] = 1 - p$$

şeklinde tanımlansın. Alt deneyi A gerçekleşinceye kadar tekrarlayalım.

- A'nın k. denemede gerçekleştiğini varsayalım:

A^C	A^C	A^C	A^C	…	A^C	A
1	2	3	4	…	k-1	k

istenmeyen istenen

A'nın k. denemede gerçekleşme olasılığı:

$$\Pr[\text{A'nın k. denemede gerçekleşmesi}] = \underbrace{(1-p)(1-p)(1-p)(1-p)\cdots(1-p)}_{k-1 \text{ sonuçsuz deneme}}\; p$$

$$= (1-p)^{k-1}\; p$$

<u>Örnek</u>:

Bir bilgisayardan bilgisayara modem hattında alıcı bilgisayar hata tespit algoritmasına sahiptir. Bu bilgisayar hata tespit ederse paketin tekrar gönderilmesini talep etmektedir. Basitlik açısından paket uzunluğunun 8 bit olduğunu varsayalım. Kanal hatasını olasılığı Pr[hata] = 0.1 ise

(a) hatanın paketteki 5. bit'ten sonra oluşması olasılığı nedir?

$$\Pr[k > 5] = \Pr[k = 6] + \Pr[k = 7] + \Pr[k = 8]$$

$$= 0.9^5 \cdot 0.1 + 0.9^6 \cdot 0.1 + 0.9^7 \cdot 0.1$$

$$= 0.16002279$$

(b) paketin iki kere yeniden gönderilmesi olasılığı nedir?

- 8 bit'ten herhangi biri hatalıysa paket en azından 1 kez yeniden gönderilir.
- yeniden gönderilen 8 bit'in herhangi biri hatalıysa paket tekrar yeniden gönderilir.

$$\Pr[1 \text{ yeniden gönderme}] = \Pr[k \geq 1] = \sum_{i=1}^{8} \Pr[k = i] = 0.5695$$

$$\Pr[2 \text{ yeniden gönderme}] = \left(\Pr[1 \text{ yeniden gönderme}]\right)^2 = 0.3244$$