Çözümlü Örnekler

1) Bir fabrikada üretilen pompalar saatte 12.3 ton suyu boşaltmaktadırlar. σ^2= 2'dir. Bu pompalara yeni ekler yapılmak isteniyor fakat pahalıdır. Saatte ortalama olarak 13 tondan fazla su boşaltılabilirse yeni tesisat yapılacaktır. Değişiklik yapılıp yapılmayacağına karar vermek amacı ile 14 yeni makine deneniyor. Ortalama 13.3 bulunuyor. Bu örneklemin verdiği sonuca dayanarak yeni tesisat yapılması uygun mudur? (α = 0.25)

1. H_0 : Yeni makinelerden elde edilen ortalama = 13.0

$H_1 : \mu > 13.0$

2. α = 0.25 olmak üzere fabrikatör bu büyüklüğün riskini kabulleniyor.

$$Z = \frac{\bar{x} - 13}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}}}$$

3. $Z > Z_{0,75}$ ise H_0 reddedilir

$$Z = \frac{13,3 - 13}{\frac{1,4}{\sqrt{14}}} \sim 0,80 > 0,675 = Z_{1-\alpha}$$

Sonuç : H_0 reddedilir. Yeni makineler kullanılacaktır.

2) Belli tipteki farelerin doğumundan 3 aylık oluncaya kadar kazandıkları ortalama ağırlık 65 gramdır. 12 fare doğumdan üç aylık oluncaya kadar özel gıda rejimi ile beslenmiştir. Ağırlıkları şöyle bulunmuştur; 55, 62, 54, 58, 65, 64, 60, 62, 59, 67, 61, 62. $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde özel rejiminin $\mu = 65$ gram ortalama ağırlıkları değiştirdiğini gösteren inandırıcı neden var mıdır?

Çözüm :

1.

$H_0 : \mu = 65 (= \mu_0)$

$H_0 : \mu \neq 65$

2. $\alpha = 0,05; n = 12$ serbestlik derecesi =11

$S = 3.8406; \bar{x} = 60.75$

$$t = \frac{\bar{x} - 65}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - 65}{\frac{3.8406}{\sqrt{12}}}$$

O halde $t = \frac{(60,75 - 65).\sqrt{12}}{3.06} = -3.83$ bulunur.

3. $t < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ise H_o reddedilir.

$t_{0,975} = -2.20 > -3.83$ olduğundan H_o reddedilir.

3) Belli bir işi bitirmek için gereken ortalama zaman 12.5 dakika olarak biliniyor. 10 yeni işçi belirtilen işi yapmak üzere deneniyor. Deneme sonunda aynı işi yapma zamanları şöyledir;

9.3; 12.1; 15.7; 10.3; 12.2; 14.8; 15.1; 13.2; 15.9; 14.5.

$\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde bu örneklemin alındığı kitle için zamanın ortalamadan farkı olup olmadığı hipotezini test ediniz.

1. $H_0 : \mu = 12.5 (= \mu_0)$

$H_1 : \mu \neq 12.5$

2. $n = 10, n-1 = 9$

$\sum X_i^2 = 1818.67$; $\sum X_i = 133.1$; $s_x^2 = \dfrac{47.109}{9} = 5.23$

$s_x = 2.28 : \bar{x} = 13.31.$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{13.31 - 12.5}{\frac{2.28}{\sqrt{n}}} = 1.13$$

3. $t > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ise H_0 reddedilir. $t_{0.975} = 2.26$ bulunur. O halde $t_{0.975} > t$ olduğundan H_0 reddedilemez.

İşçilerin ortalamadan farkı oldukları kabul etmemizi gerektiren neden yoktur.

4) Bir A firması tarafından üretilen elektrik ampulleri arasından seçilen 80 ampul için ortalama ömür 1258 saat bulunmuştur. Kitleye ait standart sapma 94 saattir. Diğer bir B firması tarafından üretilen ampuller arasından rasgele seçilen 60 ampul için ortalama ömür 1029 saat ve kitle standart sapması 68 saattir. A firmasının ampulleri pahalıdır. Bu nedenle A firması tarafından üretilen ampullerin ömrü B' nin kilerin ortalama ömründen 200 saatten çok değilse B firmasının ampullerini satın almak için karar verilecektir. $\alpha = 0.01$ anlam düzeyinde hangi firmanın ampullerinin alınacağını test ediniz.

μ_A ve μ_B sırasıyla A ve B firmaları tarafından üretilen ampullerin ortalama ömrü olsun.

1. $H_0 : \mu_A - \mu_B \leq 200$ saat

$H_1 : \mu_A - \mu_B > 200$ saat

2. $n_1 = 80, n_2 = 60$, $\alpha = 0.01$

$\bar{x}_1 = 1258, \quad \sigma_1 = 94$

$\bar{x}_2 = 1029, \quad \sigma_2 = 68$

$$z_h = \frac{(1258 - 1029) - 200}{\sqrt{\frac{94^2}{80} + \frac{68^2}{80}}} = 2.12\text{'dir.}$$

3. Kritik bölge : $z > 2.237 = z_{1-\alpha} = z_{0.9}$

$z = 2.12 < z_{1-\alpha} = 2.237$ olduğundan H_0 reddedilemez. Yani B firmasının ampullerini satın alınacaktır.

II. σ_1^2 ve σ_2^2 bilinmiyor fakat eşit kabul ediliyor(küçük örneklem testleri)

S_1^2 ve S_2^2, σ_1^2 ve σ_2^2 için yansız tahmin ediciler ise;

$S_p^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ olmak üzere

$t = \dfrac{\overline{x_1}-\overline{x_2}-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ istatistiği n_1+n_2-2 serbestlik dereceli student-t dağılımına sahiptir.

$t > t_{1-\frac{a}{2}}$ ve ya $t < -t_{1-\frac{a}{2}}$ ise α önem düzeyinde $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ hipotezini $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ hipotezine karşı reddedilir.

5) Okumayı geliştirme sınıfına kayıtlı 9 öğrencilik iki gruba okuduğunu anlama testi uygulanıyor. Elde edilen puanlar kaydediliyor. Gruplardan birisi test konusunu sesli olarak, diğeri sessiz olarak okuyorlar. Elde edilen veriler $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde sesli ve sessiz okuma koşulları altında ortalama anlama puanlarının farklı olduğunu gösteren yeterli deliller midir?

SESLİ	35	31	29	25	34	40	27	32	31
SESSİZ	41	35	31	28	35	44	32	37	34

Kitle varyansları eşit olarak kabul edilsin. Verilere göre

$\overline{x_1} = 31.56 \quad \overline{x_2} = 35.22$

$\sum_{i=1}^{9}(x_{i1}-\overline{x_1})^2 = 160.22$

$\sum_{i=1}^{9}(x_{i2}-\overline{x_2})^2 = 195.56$ elde edilir. Ortak varyansın tahmini;

$S_p^2 = \dfrac{160.22+195.56}{9+9-2} = 22.24$ ve standart sapma $S_p = 4.72$' dir.

Test edilecek olan hipotez;

1. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ 'dir.

2. $\alpha = 0.05$ ise,

$S_1^2 = \dfrac{160.22}{9-1}$, $S_2^2 = \dfrac{195.56}{9-1}$ ve $S_p\sqrt{\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{M}} = 4.72.\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}} = \dfrac{\sqrt{2}.4.72}{3}$ bulunur.

$t_h = \dfrac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} = -1.65$

3. $sd = 9+9-2 = 16$

Kritik bölge; t < –2.120 ve t > 2.120'dir.

$t_h > -t_{\alpha/2}$ ve $t_h < t_{\alpha/2}$ olduğundan H_0 red edilemez.

Yani, sesli ve sessiz okuma koşulları için okuduğunu anlama puanlar ortalamasının farklı olduğunu gösteren yeterli bir delil olmadığı sonucuna varılır.

6) Büyük bir şirket ortalama dayanma sürelerini esas alarak iki tip elektrik ampulü arasında seçim yapmak istiyor. Birinci tip ampulün fiyatı ikinci tipin fiyatından ucuzdur. $\alpha = 0.05$ önem düzeyinde ikinci tipin ortalama dayanma süresi birinciden önemli derecede çok değilse şirket birinci tipi seçecektir. Her iki tipten de denemek amacıyla 26' şar ampullük örneklem seçiliyor ve $\bar{x}_1 = 985$ saat, $\bar{x}_2 = 1003$ saat $s_1 = 60$ saat ve $s_2 = 80$ saat bulunuyor. Bu sonuçlara dayanarak ne karar verilebilir.

Çözüm:

1. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_a : \mu_1 < \mu_2$

2. $t_h = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$

$\mu_1 = \mu_2$ ise $t_{n1+n2-2}$, 26 + 26 – 2 = 50 serbestlik dereceli t-dağılıma sahiptir.

a) Örneklemeler rasgele seçilmiştir.

b) Elektrik ampullerinin dayanma sürelerinin kitleleri normal dağılımlıdır.

c) Her iki kitle aynı varyansa sahiptir.

$$s_p^2 = \frac{25.80^2 + 25.60^2}{50} = \frac{6400 + 3600}{2} = 5000$$

$S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}} = \dfrac{100}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{1}{26} + \dfrac{1}{26}} = \dfrac{100}{\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{26}} = 19.6$ bulunur o halde, test istatistiğinin hesaplanan değeri;

$t_h = \dfrac{985 - 1003}{19.6} = 0.918$ 'dir.

3. Kritik bölge sınırı: $t_{50:0,95} = -1.6759$

H_0 hipotezi reddedilemez. Yani ikinci tip ampul satın alınmayacaktır.

7) Son 15 yıllık kayıtlara göre şubat ayında yurdumuzun bir A bölgesinde ortalama yağış 18 cm ve standart sapma 4 cm'dir. İkinci bir B bölgemizde son 10 yıllık kayıtlara göre aynı ay için ortalama yağış 10 cm ve standart sapma 2 cm dir. $\alpha = 0,01$ cm alarak şubat ayı içinde ortalama yağışların eşit olduğu hipotezini, A bölgesinde yağışın daha çok olduğu hipotezine karşı test ediniz. Gözlemlerin farklı varyanslı normal kitlelerden alındığını kabul ediniz.

Çözüm :

μ_A ve μ_B sırası ile A ve B bölgeleri için ortalama yağış göstersin.

1. $H_0 : \mu_A = \mu_B$

$H_1 : \mu_A > \mu_B$

2. $t_v = \dfrac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - 0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{N} + \dfrac{S_2^2}{M}}} = -\dfrac{18-10}{\sqrt{\dfrac{16}{15} + \dfrac{4}{10}}} = \dfrac{8}{1.22} \sim 6.5$

3. $\alpha = 0.01$

Kritik bölge : serbestlik derecesi :

$$\upsilon = \frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\left(\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1+1} + \dfrac{\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2+1}\right)} - 2 \text{ olduğundan } v = \frac{\left[\dfrac{4^2}{15} + \dfrac{2^2}{10}\right]^2}{\dfrac{\left(\dfrac{4^2}{15}\right)^2}{16} + \dfrac{\left(\dfrac{2^2}{10}\right)^2}{11}} - 2 \sim 23$$

Bu nedenle kritik bölge $t > t_{1-\alpha} = t_{0.99} = 2.508$ ’dir.

$t_v > t_{1-\alpha}$ olduğundan H_0 reddedilir. Yani, A bölgesi B bölgesinden daha çok yağış almaktadır.

8) Daktilo ile yazma kursuna gitmeden önce ve sonra 1 sekreterin dakikada yazabildikleri sözcük sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir. Sayılar normal dağılıma sahip kabul edilir. Kursun etkili olduğu α = 0,05 anlam düzeyinde söylenebilir mi?

Sekreter	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Önce	40	47	33	54	61	39	42	47	58	50
Sonra	52	45	51	60	58	69	65	63	59	72
D=Önce-Sonra	-12	2	-18	-6	3	-30	-23	-16	-1	122

Çözüm :

1. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ yada $\mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_a : \mu_1 - \mu_2 < 0$ yada $\mu_D = 0$

2. D = –1.23 $\quad S^2_D = 130.45 \quad \dfrac{S^2_D}{\sqrt{10}} = 13.045 \quad \dfrac{S_D}{\sqrt{10}} = 3.61$

$$t_D = \frac{\bar{D} - 0}{\dfrac{S_D}{\sqrt{10}}} = \frac{-1.23}{3.61} = -3.41$$

3. $t < -t_{0.95}$ ise H_0’ı reddedilir. $-t_{N-1;0.95} = -1.833$ (9 serbestlik dereceli) olduğundan, H_0 reddedilir ve $\mu_1 < \mu_2$ yada $\mu_1 - \mu_2 < 0$ olduğu sonucuna varılır. Yani, kursun olumlu yönde etkili olduğunu söylenebilir.