Üstel Fonksiyon:

a >o, a $\neq 1$ ve x herhangi bir reel sayı olmak üzere f: $R \rightarrow R^{+}$, f(x)=a^{x} fonksiyonuna "üstel fonksiyon" denir.

f(x)= 2^{x} , f(x)=$\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ ve f(x)=3^{-x} gibi tabanı sabit sayı (pozitif ve 1' den farklı) ve üssü değişken olan bu fonksiyonlar üstel fonksiyonlara birer örnektir.

Üstel Fonksiyonların Grafiği:

f(x)= a^{x} üstel fonksiyonunun temel özellikleri şunlardır:

1) Her x değeri için a^{x}>0' dır. Yani , üstel fonksiyonun tanım kümesi $(-\infty,\infty)$ için değer kümesi (0, ∞)' dur. Böylece fonksiyonun grafiği daima x- ekseninin üst bölgesinde kalır. Özel olarak üstel fonksiyon hiçbir zaman sıfır değerini almaz.

2)$y=a^{x}$ üstel fonksiyonunda; x=0 için $a^{0}=1$ olduğundan üstel fonksiyonun grafiği daima (0,1) noktasından geçer.

3)$y=a^{x}$ üstel fonksiyonunda; 0<a<1 iken $x_1 < x_2$ için $a^{x_1} > a^{x_2}$ olduğundan fonksiyon daima azalandır. a >1 iken $x_1 < x_2$ için $a^{x_1} < a^{x_2}$ olduğundan fonksiyon daima artandır.

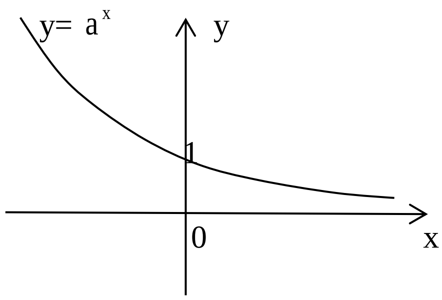
Buna göre, $y=a^{x}$ üstel fonksiyonu $x_1 \neq x_2$ için $a^{x_1} \neq a^{x_2}$ olduğundan birebirdir.

4)$b \in R^{+}$ olmak üzere a^{x}=b olacak şekilde bir $x \in R$ sayısı vardır.

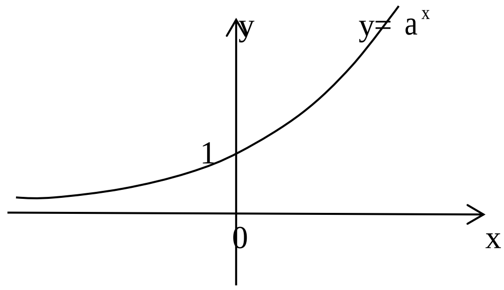
5) $y=a^{x}$ üstel fonksiyonunda, a=e alınırsa $y=e^{x}$ üstel fonksiyonu elde edilir. Buradaki e sayısı irrasyonel bir sayı olup yaklaşık değeri e $\approx$2,718281…' dir. Bu sayının taban olarak alınması matematiksel açıdan anlamlıdır. Bu fonksiyona "doğal üstel fonksiyon" ya da "eksponansiyel fonksiyon" denir ve exp(x)= e^{x} ile gösterilir.

$$\boxed{\exp(x)= e^{x}}$$

NOT: Üstel fonksiyonların grafiklerini aşağıda gösterildiği gibi genelleştirebiliriz:



$0<a<1$



$a>1$

Logaritma Fonksiyonu:

Üstel fonksiyon birebir örten bir fonksiyon olduğundan, R^+ üzerinde tanımlı ve üstel fonksiyonun ters fonksiyonu olan bir fonksiyondan söz edilebilir. Üstel fonksiyonun ters fonksiyonu logaritma fonksiyonudur. Yani, f: $R \to R^+$, f(x)= a^x ise $f^{-1}: R^+ \to R$, $f^{-1}(x)=\log_a x$ dir.

$a>0$, $a \neq 1$ olmak üzere $b \in R^+$ sayısının a tabanına göre logaritması $a^x=b$ eşitliğini sağlayan bir x sayısıdır. Buna göre logaritma fonksiyonu, $a>0$, $a \neq 1$ ve $b \in R^+$ olmak üzere

$$\boxed{a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b}$$

şeklinde de tanımlanır ve " a tabanına göre logaritma b" diye okunur.

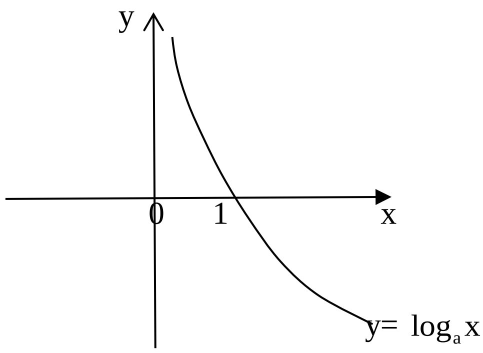
Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna "bayağı logaritma fonksiyonu" denir. 10 tabanındaki logaritma fonksiyonu taban yazılmadan da belirtilebilir.

$$\boxed{\log_{10} x=\log x}$$

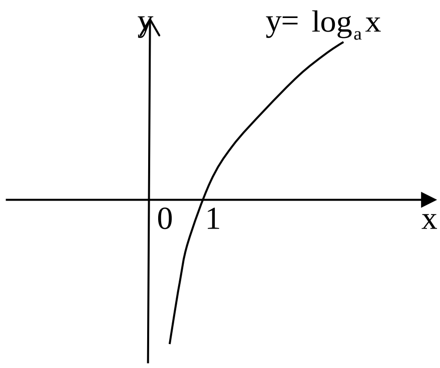
Tabanı e (e=2,718281…) sayısı olan logaritma fonksiyonuna "doğal logaritma fonksiyonu" denir. e tabanındaki logaritma fonksiyonu, genellikle "ln" fonksiyonu kullanılarak gösterilir. Yani, ln x gösterimi $\log_e x$ anlamına gelmektedir.

$$\boxed{\log_e x=\ln x}$$

Logaritma Fonksiyonunun Grafiği:



0<a<1



a>1

Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri:

1)$\log_a 1=0$ (1'in her tabandaki logaritması daima sıfırdır.)

2)$\log_a a=1$ (Tabanın logaritması daima 1'dir.)

3)$\log_a x^y = y.\log_a x$

4)$\log_{a^x} b^y = \frac{y}{x}.\log_a b$

5)$\log_a (x.y)=\log_a x+ \log_a y$

6)$\log_a (\frac{x}{y})= \log_a x - \log_a y$

7)$\log_x y=\frac{\log_a y}{\log_a x}$ (Taban Değiştirme)

8)$a^{\log_a x} = x$

Örnek: $\log_5 1 = 0$

$\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$

$\log\ 1 = \log_{10} 1 = 0$

$\ln\ 1 = \log_e 1 = 0$

$\log_4 4 = 1$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$

$\log\ 10 = \log_{10} 10 = 1$

$\ln\ e = \log_e e = 1$

Örnek:

$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6.\log_2 2 = 6.1 = 6$

$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4.\log_3 3 = 4.1 = 4$

Örnek: $\log_{27} 81 = \log_{3^3} 3^4 = \frac{4}{3}.\log_3 3 = \frac{4}{3}.1 = \frac{4}{3}$

$\log_{\frac{1}{5}} 125 = \log_{5^{-1}} 5^3 = \frac{3}{-1}.\log_5 5 = -3.1 = -3$

Örnek: $x \in R^+$ olmak üzere, $\log_2 x = 4 \Rightarrow x = ?$

çözüm:

1. yol: $\log_2 x=4$ (Tanımdan: $a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b$)

$x=2^4=16$

2. yol: $2^{\log_2 x} = 2^4$ (Özellikten: $a^{\log_a x}=x$)

$x = 2^4$

$x=16$

Örnek: $\ln 8+\ln 4-2.\ln 5=\ln (8.4) - \ln 5^2$

$=\ln 32-\ln 25$

$=\ln\left(\dfrac{32}{25}\right)$

Örnek: $\ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right)=\ln 1-\ln x^3$

$=\log_e 1-3.\ln x$

$=0 - 3.\ln x$

$=-3.\ln x$

Örnek: $3^{\log_3 5}=5$ (Özellikten: $a^{\log_a x}=x$)

Örnek: $\log_3 2=a$ ise $\log_2 48$ ’ in a türünden değeri nedir?

çözüm: Taban değiştirme kuralından: $\log_x y=\dfrac{\log_a y}{\log_a x}$ olduğunu biliyoruz. Buradan:

$$\log_2 48=\frac{\log_3 48}{\log_3 2}$$

$$=\frac{\log_3\left(2^4.3\right)}{\log_3 2}$$

$$=\frac{\log_3 2^4+\log_3 3}{\log_3 2}$$

$$=\frac{4.\log_3 2+\log_3 3}{\log_3 2}$$

$=\dfrac{4a+1}{a}$ olarak bulunur.

Üslü ve Logaritmalı Denklemler:

$a>0$ ve $a\neq 1$ için,

1) $a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$

2) $x>0$ ve $y>0$ olmak üzere $\log_a x=\log_a y \Leftrightarrow x=y$

Örnek: $4^{4x}=16^{3x-8}$ ise x kaçtır?

çözüm: $4^{4x} = 16^{3x-8}$

$4^{4x} = \left(4^2\right)^{3x-8}$

$4^{4x} = 4^{6x-16}$

$4x = 6x - 16$

$2x = 16$

$x = 8$

Örnek: $e^{-2\ln x} = \dfrac{1}{16} \Rightarrow x = ?$

çözüm: $e^{-2\ln x} = \dfrac{1}{16} \Rightarrow e^{\ln x^{-2}} = \dfrac{1}{16}$

$\Rightarrow e^{\log_e x^{-2}} = \dfrac{1}{16}$ (Özellikten: $a^{\log_a x} = x$)

$\Rightarrow x^{-2} = 4^{-2}$

$\Rightarrow x = 4$

Örnek: $3^{2x-1} = 4^{x+2}$ denklemini çözünüz. ($\ln 3 \approx 1{,}0986$; $\ln 4 \approx 1{,}3863$)

çözüm: Verilen eşitlikte her iki tarafın doğal logaritmasını alırsak:

$$\ln 3^{2x-1} = \ln 4^{x+2}$$

$$(2x-1).\ln 3 = (x+2).\ln 4$$

$$(2x-1) \,.\, 1{,}0986 = (x+2) \,.\, 1{,}3863$$

$$2{,}1972 \,.\, x - 1{,}0986 = 1{,}3863 \,.\, x + 2{,}7726$$

$$0{,}8109.x = 3{,}8712$$

$$x = \frac{3{,}8712}{0{,}8109} \approx 4{,}774$$

bulunur. Buradan da soruda verilen denklemin çözüm kümesi, Ç.K=$\{4{,}774\}$ olarak elde edilir.

Örnek:

$\log_4(3x-8) = \log_4(2x+6)$ denklemini çözünüz.

çözüm: $\log_4(3x-8) = \log_4(2x+6)$

$$3x-8 = 2x+6$$

$$x = 14$$

x=14 değeri soruda verilen denklemde logaritmalı ifadelerde yerine yazılırsa:

$$3x-8 = 3.14-8 = 34 > 0 \quad \text{ve} \quad 2x+6 = 2.14+6 = 34 > 0$$

olduğu görülür. Logaritma fonksiyonu, x-ekseninin pozitif bölgesinde tanımlı olduğundan x=14 değeri soruda verilen denklemin çözüm değeridir.

Buradan denklemin çözüm kümesi, Ç.K=$\{14\}$ olarak elde edilir.

Uyarı: y=$\log_a x$ fonksiyonunda $x \in (0,\infty)$ olması gerektiğinden, elde edilen çözümlerin her birinin soruda verilen logaritma fonksiyonlarında bu koşulu sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir.

Örnek: log(2x+1)=log(x+7)+1 denkleminin çözüm kümesi nedir?

çözüm: log(2x+1)=log(x+7)+1

$$\log(2x+1)=\log(x+7)+\log 10$$

$$\log(2x+1)=\log\left[10.(x+7)\right]$$

$$2x+1=10(x+7)$$

$$2x+1=10x+70$$

$$8x=-69$$

$$x=-\frac{69}{8}$$

Bulduğumuz x= $-\frac{69}{8}$ değeri soruda verilen denklemde yerine yazılırsa, log(2x+1) ve log(x+7) fonksiyonları sırasıyla, $\log\left(-\frac{65}{4}\right)$ ve $\log\left(-\frac{13}{8}\right)$ olacağından çözüm olarak kabul edilemez. Çünkü $\log_a x$ fonksiyonu, x-ekseninin pozitif bölgesinde tanımlı idi.

O halde, denklemin kökü yoktur. Denklemin kökü yoksa, çözüm kümesine yazılacak hiç eleman olmadığından denklemin çözüm kümesi, Ç.K= $\varnothing$' dir.

Örnek: $\log_5(x-2)=0 \Rightarrow x=?$

çözüm:

1.yol: $\log_5(x-2)=0$

$x-2=5^0$ (Tanımdan: $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$)

$x-2=1$

$x=3$

2.yol: $\log_5(x-2)=0$

$\log_5(x-2)=\log_5 1$

$x-2=1$

$x=3$