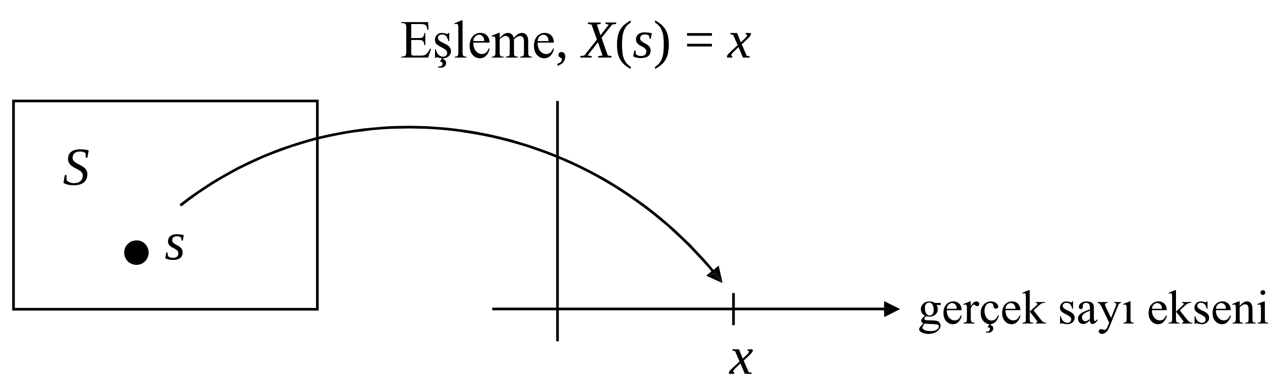
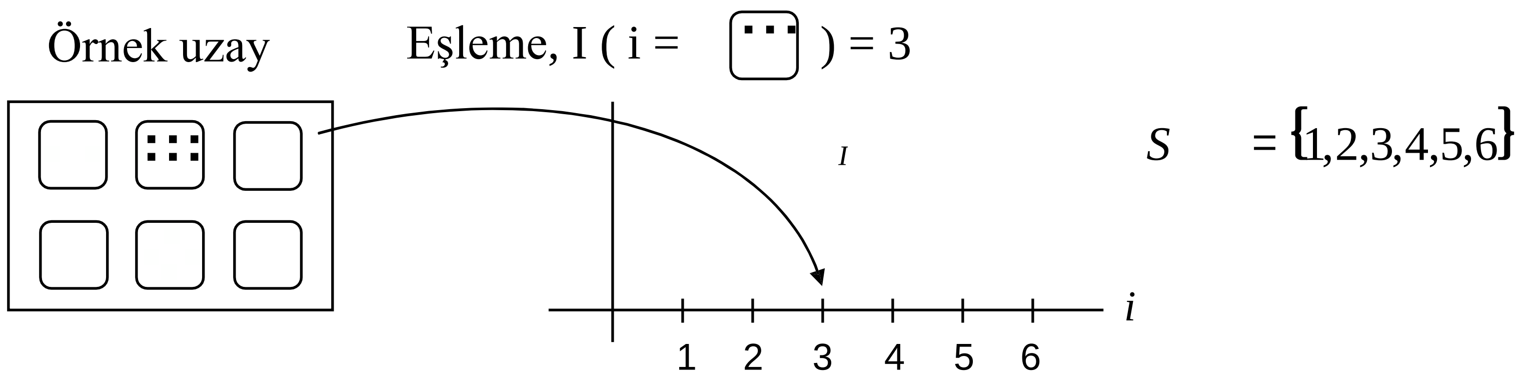
Rastgele Değişkenler (Kesikli)

$X(s)$ rastgele değişkeni, bir gerçek sayıyı rastgele bir deneyin örnek uzayındaki her bir çıkışa atayan bir fonksiyondur.



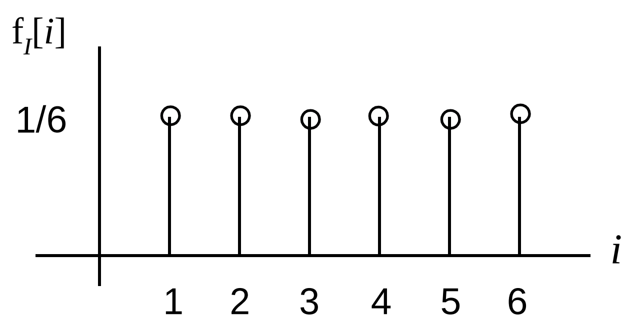
Örnek:

Zar atılması. $I \triangleq$ zar üzerindeki nokta sayısı olsun



Örnek Uzay: $S_I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

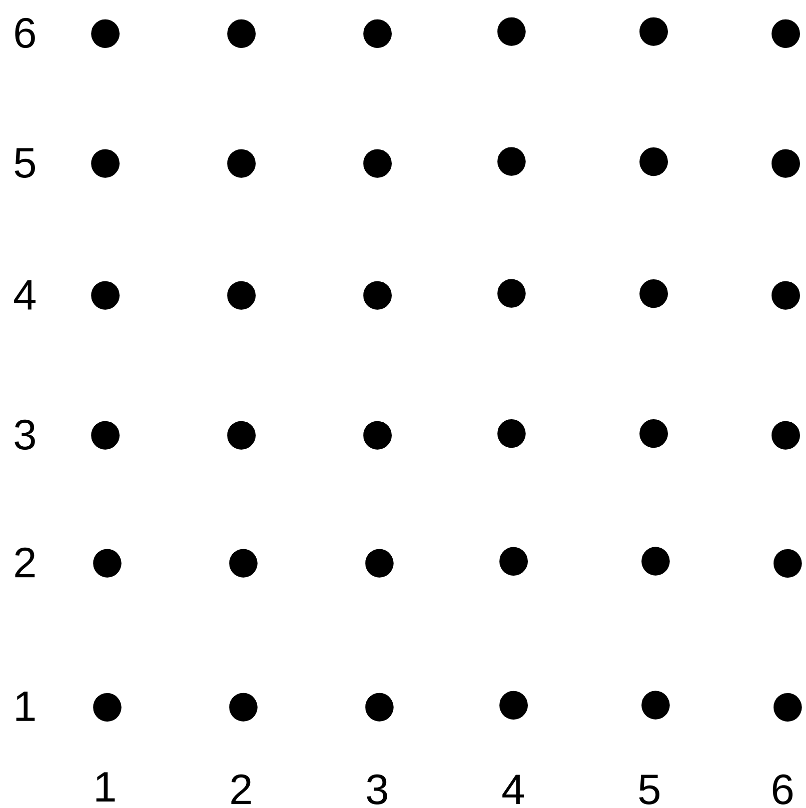
Olasılık Kütle Fonksiyonu (PMF):



$$\sum_{i=1}^{6} \mathrm{f}_I[i] = 1 \quad \text{ve} \quad \mathrm{f}_I[i] = \Pr[I = i]$$

<u>Örnek</u>: **Bir çift zarın atılması.**

rastgele değişken *I* gelen sayı olsun



PMF $f_I[i]$=?.

Bazı Kesikli Rastgele Değişkenler

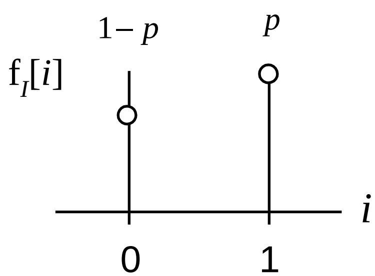
Bernoulli Rastgele Değişken: parametre p

$S=\{$doğru, yanlış$\}$

$$I \in \{1 \;\; 0\}$$

$$\Pr[I=1]=p$$

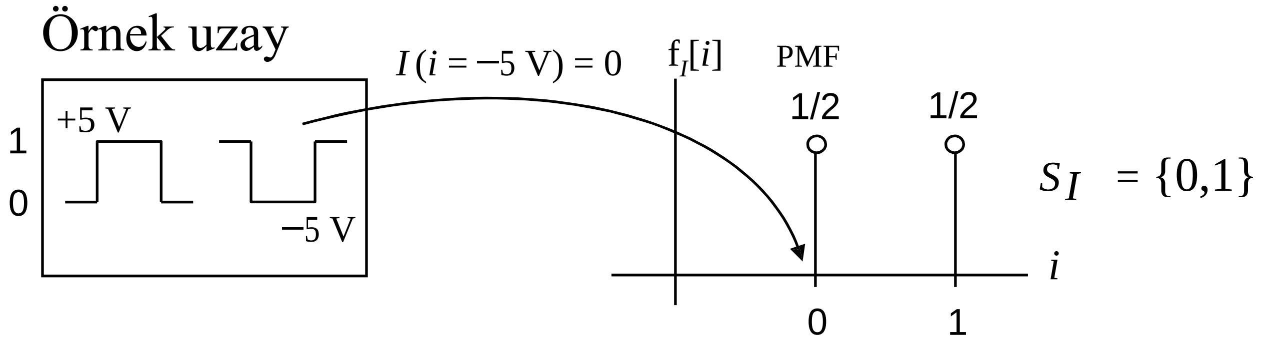
$$\Pr[I=0]=1-p$$



$f_I[i]$ 'ne olasılık kütle fonksiyonu (PMF) denir

<u>Örnek</u>: Binary rakamlar

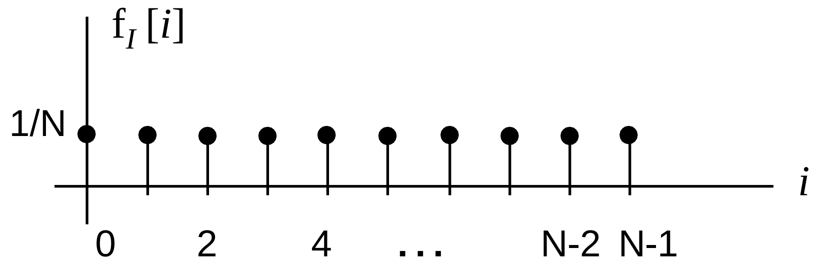
<u>Örnek</u>: Binary voltajlar.



$$\sum_i f_I[i] = 1 \qquad f_I[i] = \Pr[I = i]$$

Kesikli Birbiçim Rastgele Değişken: parametre, N

PMF: $$\mathrm{f}_I[i] = \Pr[I = i] = \frac{1}{N}$$



Kesikli Birbiçim Rastgele Değişken: parametre, N

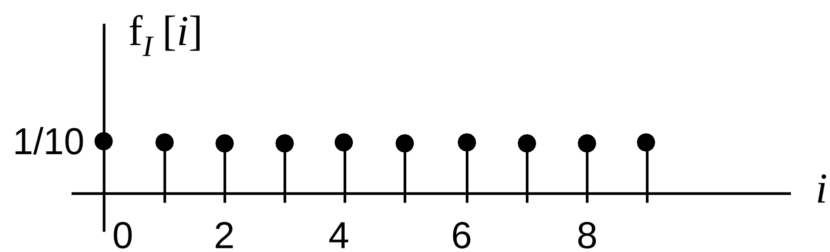
Gerçekleşmesi eşit ağırlıkta olası olan N nesneli bir dizi olsun.

<u>Örnek</u>: 0, 1, …, 9 numaralara sahip biletlein kura şeklinde çekimi. Her bir biletin çekilmesi eşit derecede olası. I bilet numarası ise;

olasılık kütle fonksiyonu

$$f_I[i] = \frac{1}{10} \qquad i = 0,1,\ldots,9$$

PMF



Binom Rastgele Değişken: parametreler N, p

N uzunluğunda binary dizi ve A istenen olay olsun

$$\Pr[A] = p$$

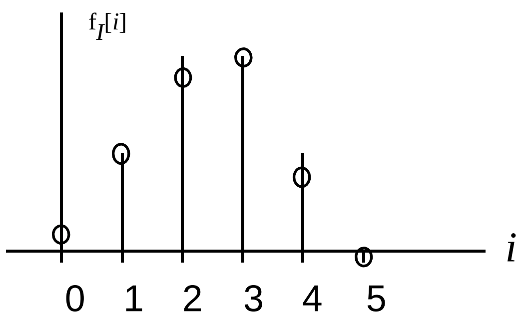
$$\Pr[A^C] = 1 - p$$

Rastgele değişken:

I = A'nın dizi içinde gerçekleşme sayısı

PMF

$$\mathrm{f}_I[i] = \Pr[I = i] = \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i}$$



Örnek: Verilen bir binary dizideki hata sayısı.

<u>Örnek</u>:

5 basamaklı binary sayıları ele alalım

S = {00000, 00001, 00010, 00011, 000100, 00101, …, 11110, 11111}

$$\Pr[1] = \frac{1}{2} \qquad \Pr[0] = \frac{1}{2} \qquad \boxed{2^5 = 32}$$

$I \triangleq$ her bir beşlideki 1 rakamı sayısı

I in the set {0, 1, 2, 3, 4, 5}

Olasılık Kütle Fonksiyonu, $f_I[i]$

$$f_I[0] = \Pr[I = 0] = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

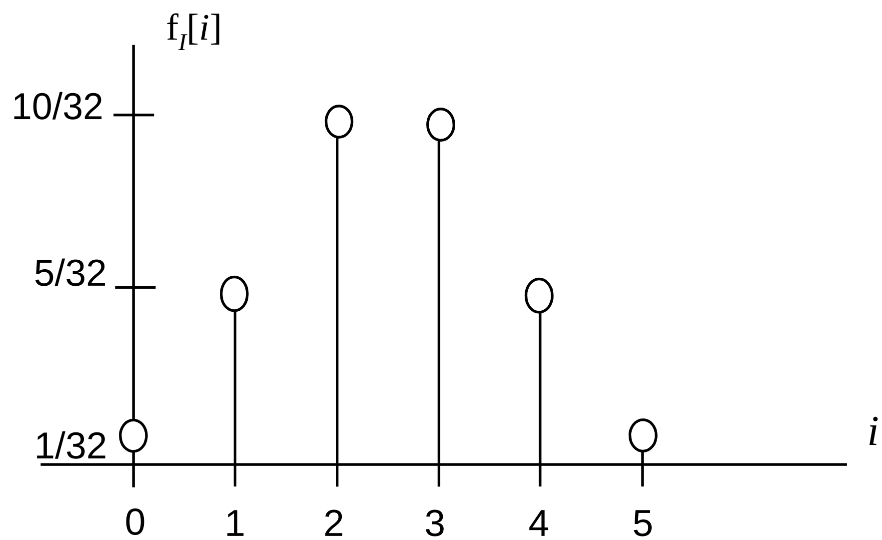
$$f_I[1] = \Pr[I = 1] = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{32}$$

$$f_I[2] = \Pr[I = 2] = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{32}$$

$$f_I[3] = \Pr[I = 3] = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{32}$$

$$f_I[4] = \Pr[I = 4] = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 5 \cdot \frac{1}{32}$$

$$f_I[5] = \Pr[I = 5] = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$$



Örnek:

Kanal hata olasılığı $p = 10^{-2}$ olan bir binary iletişim kanalından iletilen binary dizinin uzunluğu 100 dür.

n = 100 bit'te meydana gelen hata sayısı I, Binom Rastgele Değişkendir. 3'ten fazla hata olma olasılığı nedir?

$$\Pr[I \geq 4] = 1 - \Pr[I < 4] = 1 - \sum_{i=0}^{3} \mathrm{f}_I[i]$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{3} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= 1 - 0.3660 - 0.3697 - 0.1849 - 0.061$$

$$= 0.01837$$

Geometrik Rastgele Değişken: parametre, p

Uzunluğu belli olmayan binary sayı dizisini ele alalım.

A istenen olay olsun:

$$\Pr[A] = p$$

$$\Pr\left[A^C\right] = 1 - p$$

Rastgele Değişken

I = A olayı gerçekleştiğinde dizinin uzunluğu veya A olayının iki gerçekleşmesi arasındaki dizi uzunluğu

Örnek: binilecek otobüsü beklemek.

Geometrik rastgele değişken için olasılık kütle fonksiyonu:

Tip 1: $S_I = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$

$$f_I[i] = \Pr[I = i] = (1-p)^{i-1} p, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty$$

<u>Kontrol</u>:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_I[i] = \Pr[I = i] = p\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1} = p\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^{j} = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Type 0: $S_I = \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$

$$f_I[i] = \Pr[I = i] = (1-p)^{i} p, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

Kontrol

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_I[i] = p\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i} = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

<u>**Örnek**</u>**:**

Kanal hata olasılığı $p = 10^{-2}$ olan binary simetrik bir haberleşme kanalını ele alalım.

Gönderilen binary dizi çok uzundur (sonsuz uzunlukta). Bu durumda üçüncü gönderimden sonra ilk hatanın oluşması olasılığı nedir?

İlk hata için bekleme süresi J <u>Geometrik Rastgele Değişkendir.</u>

$$\Pr[J \geq 3] = \sum_{j=3}^{\infty} (1-p)^j p = (1-p)^3 = (0.99)^3 = 0.970$$

Poisson Rastgele Değişken: parametre, α

Bir olayın belirli bir zaman aralığında ya da uzayda belirli bir bölgede oluşmasını modeller.

<u>Örnek</u>:

Bir bilgisayar şebekesinde bir anahtara ulaşan paket sayısı (zaman).
Bir yarı iletken çipteki hata sayısı (uzay).

Rastgele değişken

I = ilgilenilen olayın oluşma sayısı

Olasılık kütle fonksiyonu

$$\mathrm{f}_I[i] = \Pr[I = i] = \frac{\alpha^i}{i!} e^{-\alpha}$$

<u>Kontrol</u>

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} e^{-\alpha} = e^{-\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} = e^{-\alpha} e^{\alpha} = 1$$

α olayın zaman aralığında ya da uzayda ortalama oluşma sayısıdır.

Tipik olarak λ, saniyede ortalama oluşma sayısı ve T saniye cinsinden zaman aralığı olmak üzere, α = λT dir.

<u>Özel Durum</u>: [Binomun Poisson yaklaştırması]

Binom bir rastgele değişken için $Np = \alpha$ olacak şekilde N büyük p küçük olsun.

Bu durumda

$$\Pr[I = i] = \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \cong \frac{\alpha^i}{i!} e^{\alpha}$$

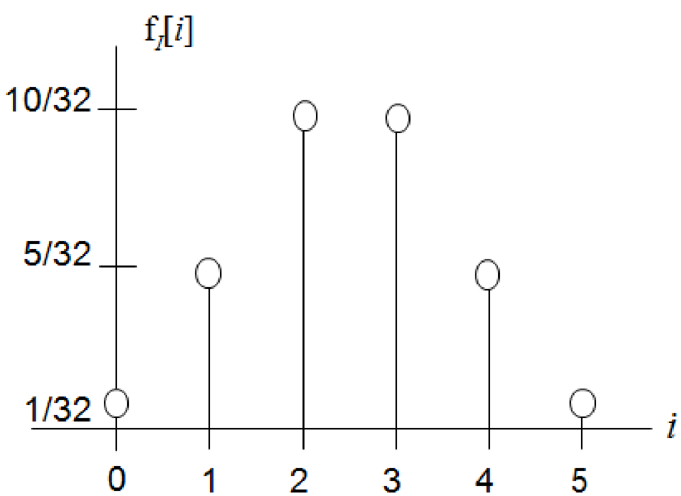
olduğu gösterilebilir.

Kümülatif Dağılım Fonksiyonu (Kesikli)

- Kümülatif Dağılım Fonksiyonu (KDF) şu şekilde tanımlanır

$$F_I[i] = \Pr[I \le i] = \sum_{j=-\infty}^{i} f_I[j]$$

PMF



CDF