ÇARPIM SEMBOLÜ

f(k)= a_k olsun. r, n $\in Z$ ve $r \le n$ olmak üzere, $a_r.a_{r+1}.a_{r+2}...a_n$ çarpımını kısaca, $\prod_{k=r}^{n} a_k$ şeklinde gösterebiliriz. Burada r alt sınır, n üst sınır ve k da değişkendir(r ≤ k ≤ n ve k ∈ Z)

$$\boxed{\prod_{k=r}^{n} a_k = a_r.a_{r+1}.a_{r+2}...a_n}$$

Örnekler:

$$\prod_{k=2}^{7} k = 2.3.4.5.6.7 = 7!$$

$$\prod_{k=-2}^{10} \frac{k+1}{k^2+1} = \frac{-1}{5}.\frac{0}{2}.\frac{1}{1}...\frac{11}{101} = 0$$

$$\prod_{n=7}^{7} n^2 = 7^2 = 49$$

$$\prod_{k=1}^{5} 2k = (2.1).(2.2).(2.3).(2.4).(2.5) = 2^5.5!$$

$$\prod_{m=3}^{7} 4 = \underbrace{4.4.4.4.4}_{5 \text{ tane}} = 4^5$$

Örnek: $A=\prod_{k=1}^{19}\left(1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\right)$ çarpımının değeri kaçtır?

çözüm:

$$A=\prod_{k=1}^{19}\left(1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\right)$$

$$=\prod_{k=1}^{19}\frac{k^2+2k+1}{k^2}$$

$$=\prod_{k=1}^{19}\frac{(k+1)^2}{k^2}$$

$$=\frac{2^2}{1^2}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{4^2}{3^2}\cdots\frac{20^2}{19^2}$$

$$=400$$

Örnek: $A=\prod_{k=1}^{39}\log_{2k+1}(2k+3)$ çarpımının sonucu kaçtır?

çözüm:

$$A=\prod_{k=1}^{39}\log_{2k+1}(2k+3)=\log_3 5.\log_5 7.\log_7 9\ldots\log_{79}81 \qquad (*)$$

olur. (*) eşitliğindeki logaritmalı ifadelerin her birinde taban değiştirme kuralı uygulanırsa:

$$A=\frac{\log 5}{\log 3}\cdot\frac{\log 7}{\log 5}\cdot\frac{\log 9}{\log 7}\cdots\frac{\log 81}{\log 79}$$

$$=\frac{\log 81}{\log 3}$$

$= \log_3 81$ (Taban Değiştirme Kuralı' ndan)

$= \log_3 3^4$

$= 4$ elde edilir.

Örnek: $A=\prod_{k=1}^{19} \frac{2^k}{k}$ çarpımının sonucu nedir?

çözüm:

$$A=\frac{2^1}{1}.\frac{2^2}{2}.\frac{2^3}{3}....\frac{2^{19}}{19}$$

$$=\frac{2^{1+2+3+...+19}}{1.2.3...19}$$

$$=\frac{2^{\frac{19.20}{2}}}{19!}$$

$$=\frac{2^{190}}{19!}$$

Örnek: $A=\sum_{p=2}^{3}\prod_{r=1}^{2} p.r^p$ toplamının değeri kaçtır?

çözüm:

$$\prod_{r=1}^{2} p.r^p = p.1^p.p.2^p$$

$$= p^2.2^p$$

$$A=\sum_{p=2}^{3} p^2.2^p$$

$$=2^2.2^2+3^2.2^3$$

$$=88$$

Çarpım Sembolünün Özellikleri:

1) $\prod_{k=1}^{n} c = \underbrace{c.c.c...c}_{\text{n tane}} = c^n$, c sabit

2) $\prod_{k=1}^{n} c.a_k = c^n \prod_{k=1}^{n} a_k$, c sabit

3) $\prod_{k=r}^{n} a_k.b_k = \left(\prod_{k=r}^{n} a_k\right).\left(\prod_{k=r}^{n} b_k\right)$

4) r<m<n olmak üzere, $\prod_{k=r}^{n} a_k = \left(\prod_{k=r}^{m} a_k\right).\left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right)$

5) $\prod_{k=r}^{n}\prod_{i=t}^{m} a_{ki} = \prod_{i=t}^{m}\prod_{k=r}^{n} a_{ki}$

6) $\prod_{k=r}^{n} a_k = \prod_{k=r+p}^{n+p} a_{k-p} = \prod_{k=r-p}^{n-p} a_{k+p}$

Örnekler:

a) $\prod_{k=1}^{19} 7 = \underbrace{7.7.7...7}_{19\text{ tane}} = 7^{19}$

b) $\prod_{k=1}^{7} 5k^3 = 5^7.\prod_{k=1}^{7} k^3$

$=5^7.\left(1^3.2^3...7^3\right)$

$=5^7.(1.2...7)^3$

$=5^7.\left(7!\right)^3$

c) $\prod_{k=3}^{17} \frac{2^k}{k^2} = \left(\prod_{k=3}^{17} 2^k\right).\left(\prod_{k=3}^{17} \frac{1}{k^2}\right)$

d) $\prod_{k=-2}^{18} k^4 = \left(\prod_{k=-2}^{10} k^4\right).\left(\prod_{k=11}^{18} k^4\right)$

e) $\prod_{k=2}^{9}\prod_{i=-1}^{7}(k+i+1) = \prod_{i=-1}^{7}\prod_{k=2}^{9}(k+i+1)$

f) $\prod_{k=7}^{27} 2^k = \prod_{k=7-6}^{27-6} 2^{k+6} = \prod_{k=1}^{21} 2^{k+6}$

g) $\prod_{k=-4}^{15} km = \prod_{k=-4+5}^{15+5} (k-5)m = \prod_{k=1}^{20} (k-5)m$

Örnek: $A=\prod_{k=1}^{17}1.\prod_{k=1}^{17}2.\prod_{k=1}^{17}3......\prod_{k=1}^{17}17$ çarpımının sonucu kaçtır?

çözüm:

$$A=\prod_{k=1}^{17}1.\prod_{k=1}^{17}2.\prod_{k=1}^{17}3......\prod_{k=1}^{17}17$$

$$=1^{17}.2^{17}.3^{17}...17^{17}$$

$$=(1.2.3...17)^{17}$$

$$=(17!)^{17}$$

Örnek: $\prod_{k=1}^{n}3.a_k=3^{n+1}$ ve $\prod_{k=1}^{n}a_k.b_k=81$ olduğuna göre, $\prod_{k=1}^{n}b_k$ çarpımının değeri kaçtır?

çözüm:

$$\prod_{k=1}^{n}3.a_k=3^{n+1}$$

$$3^n.\prod_{k=1}^{n}a_k=3^n.3$$

$$\prod_{k=1}^{n}a_k=3$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k . b_k = 81$$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right).\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right) = 81$$

$$\Rightarrow 3.\prod_{k=1}^{n} b_k = 81$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n} b_k = 27$$