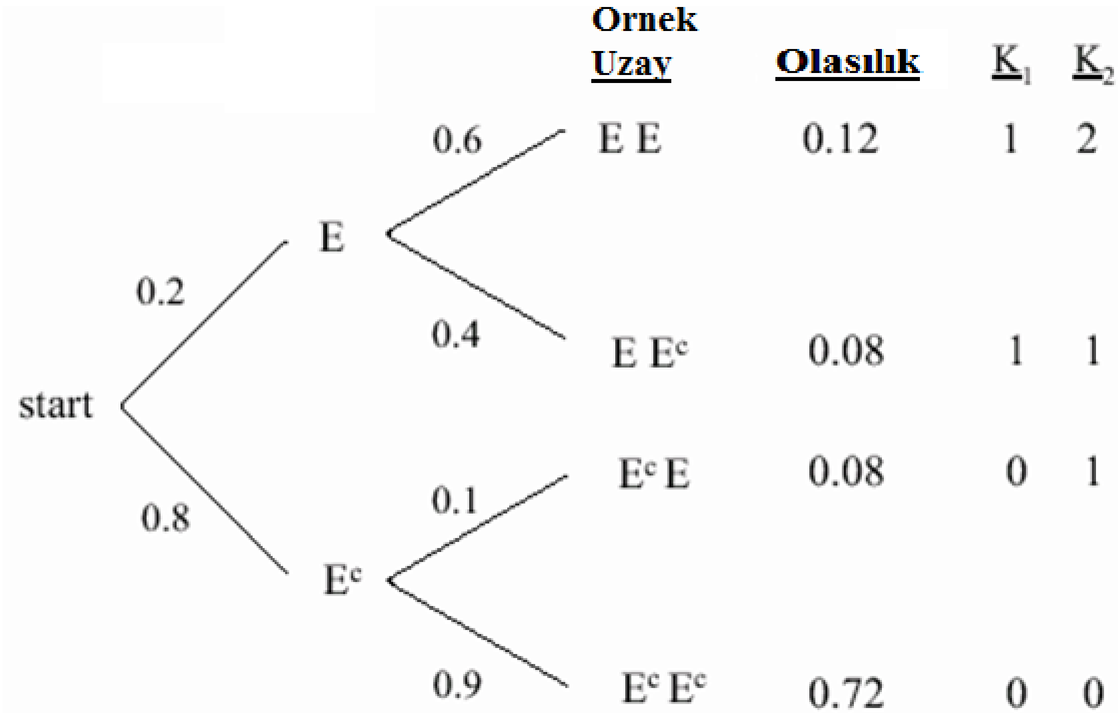
İki Rastgele Değişken

K_1 ve K_2 kesikli rastgele değişkenlerdir

K_i = i. bit ten sonra oluşan hata sayısı.

Başlangıçta $Pr[E] = 0.2$ ve $Pr[E^c] = 0.8$



K_1 K_2	olasılık
1 2	(0.2)(0.6)=0.12
1 1	(0.2)(0.4)=0.08
0 1	(0.8)(0.1)=0.08
0 0	(0.8)(0.9)=0.72

İki r.d. nin oluşumu ortak olasılığın tanımlanmasını gerektirir.

Ortak OKF

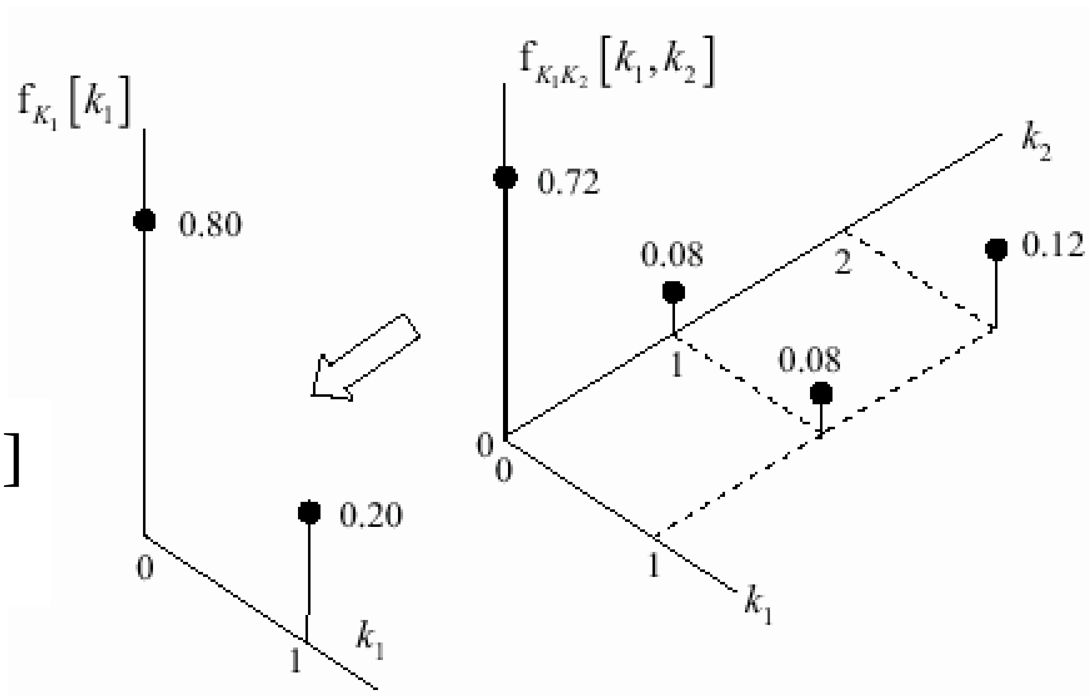
K_1 K_2	probability
1 2	(0.2)(0.6)=0.12
1 1	(0.2)(0.4)=0.08
0 1	(0.8)(0.1)=0.08
0 0	(0.8)(0.9)=0.72

$$f_{K_1,K_2}[k_1,k_2] = \Pr[K_1 = k_1, K_2 = k_2]$$

$$\boxed{\sum\sum f_{K_1,K_2}[k_1,k_2] = 1}$$

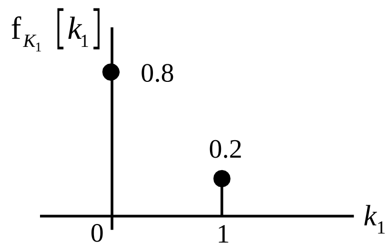
Marjinal OKF:

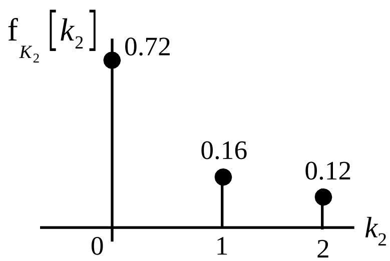
$$f_{K_1}[k_1] = \sum_{k_2} f_{K_1,K_2}[k_1,k_2]$$



Rastgele Değişkenlerin Bağımsızlığı

İki rd bağımsız ise $\quad f_{K_1,K_2}[k_1,k_2] = f_{K_1}[k_1]\cdot f_{K_2}[k_2]$





		k_2: 0.72	0.16	0.12
k_1	0.8	0.576	0.128	0.096
	0.2	0.144	0.032	0.024

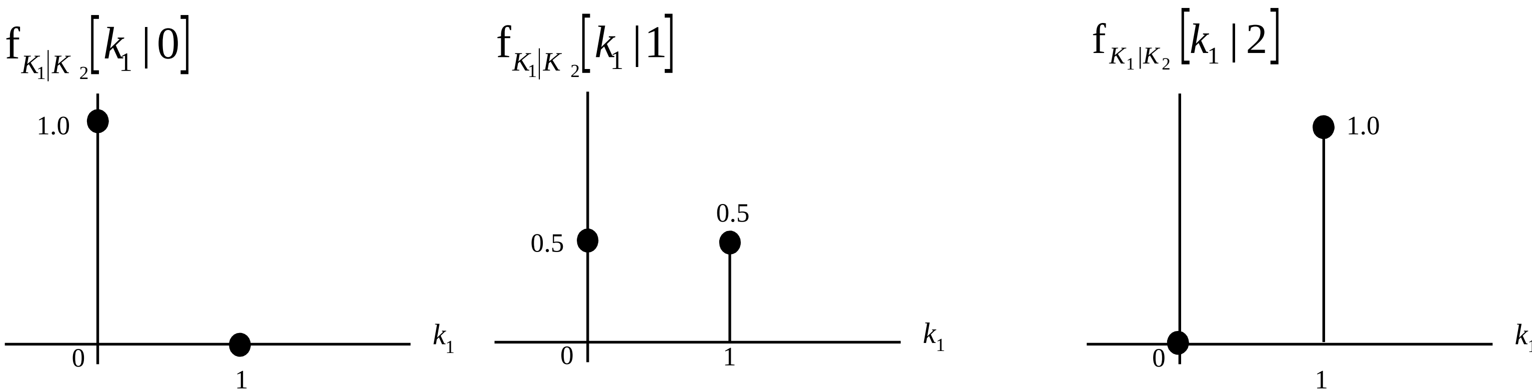
	k_2		
k_1	0.720	0.080	0
	0	0.080	0.120

bu rd'ler bağımsız mı?

Şartlı OKF

- Tanım: $$\mathrm{f}_{K_1,K_2}[k_1,k_2] = \Pr[K_1 = k_1 \,|\, K_2 = k_2]$$

$$\boxed{\mathrm{f}_{K_1,K_2}[k_1,k_2] = \frac{\mathrm{f}_{K_1,K_2}[k_1,k_2]}{\mathrm{f}_{K_2}[k_2]}}$$



<u>Bağıntılar:</u>

$$\sum_{k_1} \mathrm{f}_{K_1|K_2}[k_1 \,|\, k_2] = 1$$

$$\sum_{k_2} \mathrm{f}_{K_1|K_2}[k_1 \,|\, k_2] = ??!!?$$

OKF ları için Bayes Kuralı

$$\mathrm{f}_{K_1,K_2}[k_1 \mid k_2] = \frac{\mathrm{f}_{K_2|K_1}[k_2 \mid k_1]\mathrm{f}_{K_1}[k_1]}{\mathrm{f}_{K_2}[k_2]}$$

$$= \frac{\mathrm{f}_{K_2|K_1}[k_2 \mid k_1]\mathrm{f}_{K_1}[k_1]}{\sum_{k_1} \mathrm{f}_{K_2|K_1}[k_2 \mid k_1]\mathrm{f}_{K_1}[k_1]}$$

İki Rastgele Değişken

Sürekli rastgele değişkenler.

X_1, X_2 gibi iki rastgele değişken olsun,

Ortak oyf

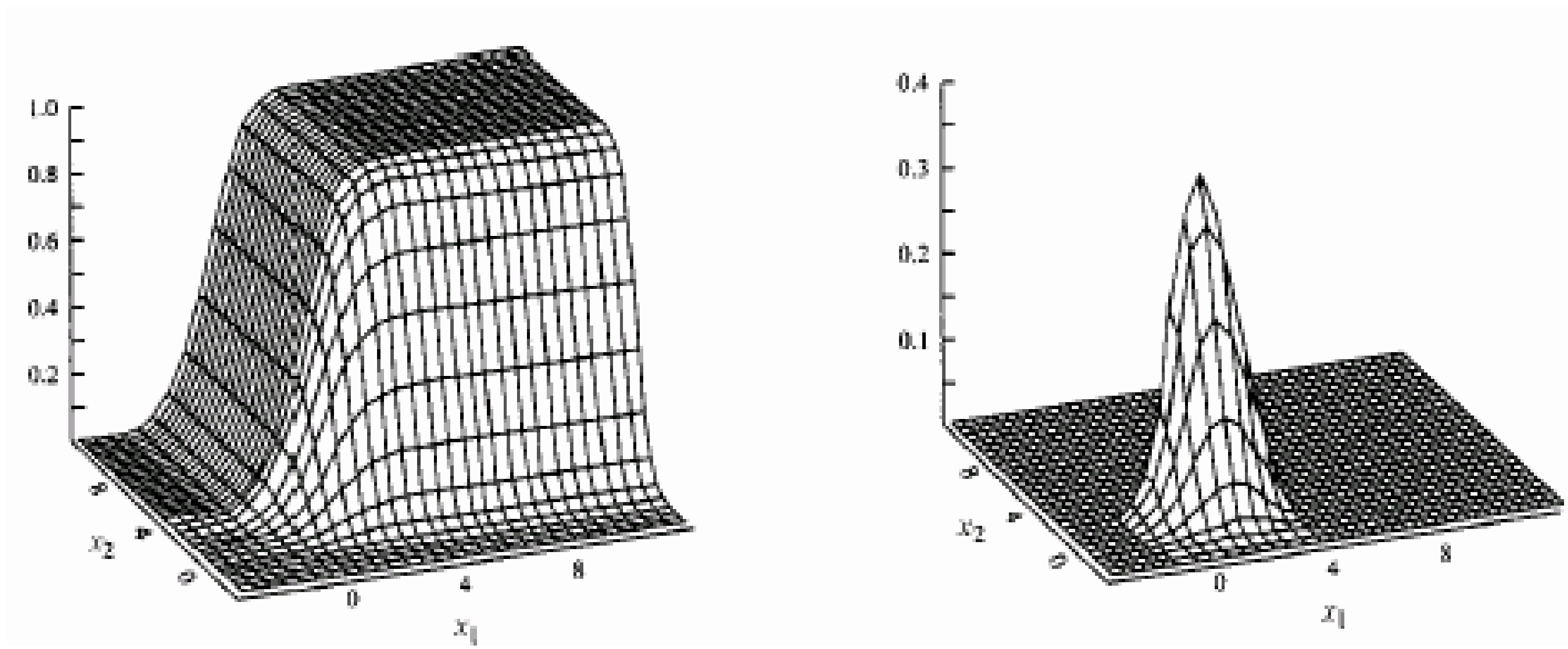
$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Ortak kdf

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \Pr\left[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2}(z_1,z_2)\, dz_2 dz_1$$

KDF ve OYF



Ortak oyf nin özellikleri

1. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 = 1, \qquad f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \geq 0$

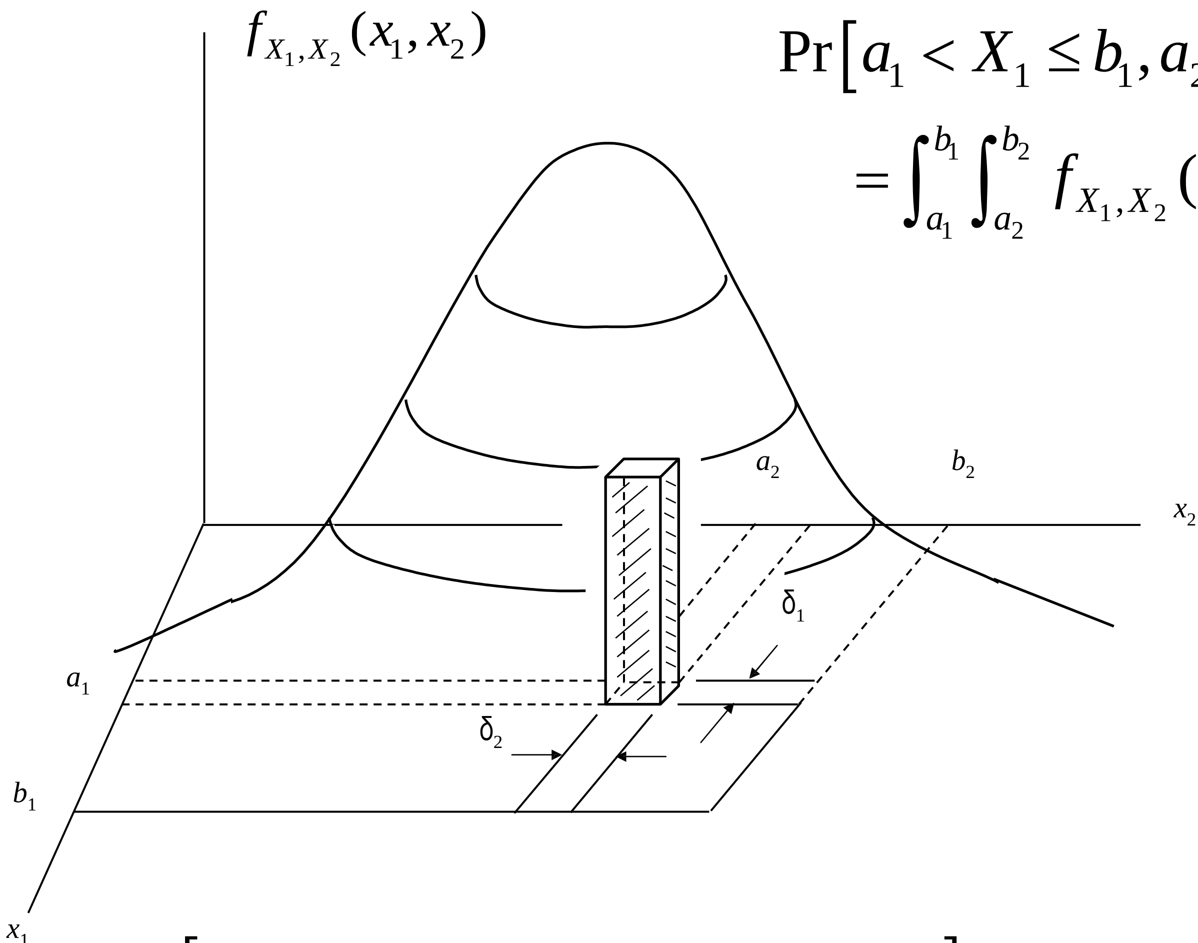
2. $\Pr\left[a_1 < X_1 \leq b_1, a_2 < X_2 \leq b_2\right] = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_2 dx_1$

3. $\Pr\left[a_1 < X_1 \leq a_1 + \delta_1, a_2 < X_2 \leq a_2 + \delta_2\right] \cong f_{X_1,X_2}(a_1,a_2)\delta_1\delta_2$

<u>Not</u>: Benzer özellikler kesikli rastgele değişkenler için de geçerlidir.

Ortak OYF'nin olasılık olarak yorumu

$$\Pr\left[a_1 < X_1 \le b_1, a_2 < X_2 \le b_2\right] = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_2 dx_1$$



$$\Pr\left[a_1 < X_1 \le a_1+\delta_1, a_2 < X_2 \le a_2+\delta_2\right] \cong f_{X_1,X_2}(a_1,a_2)\delta_1\delta_2$$

Marjinal oyf'ler

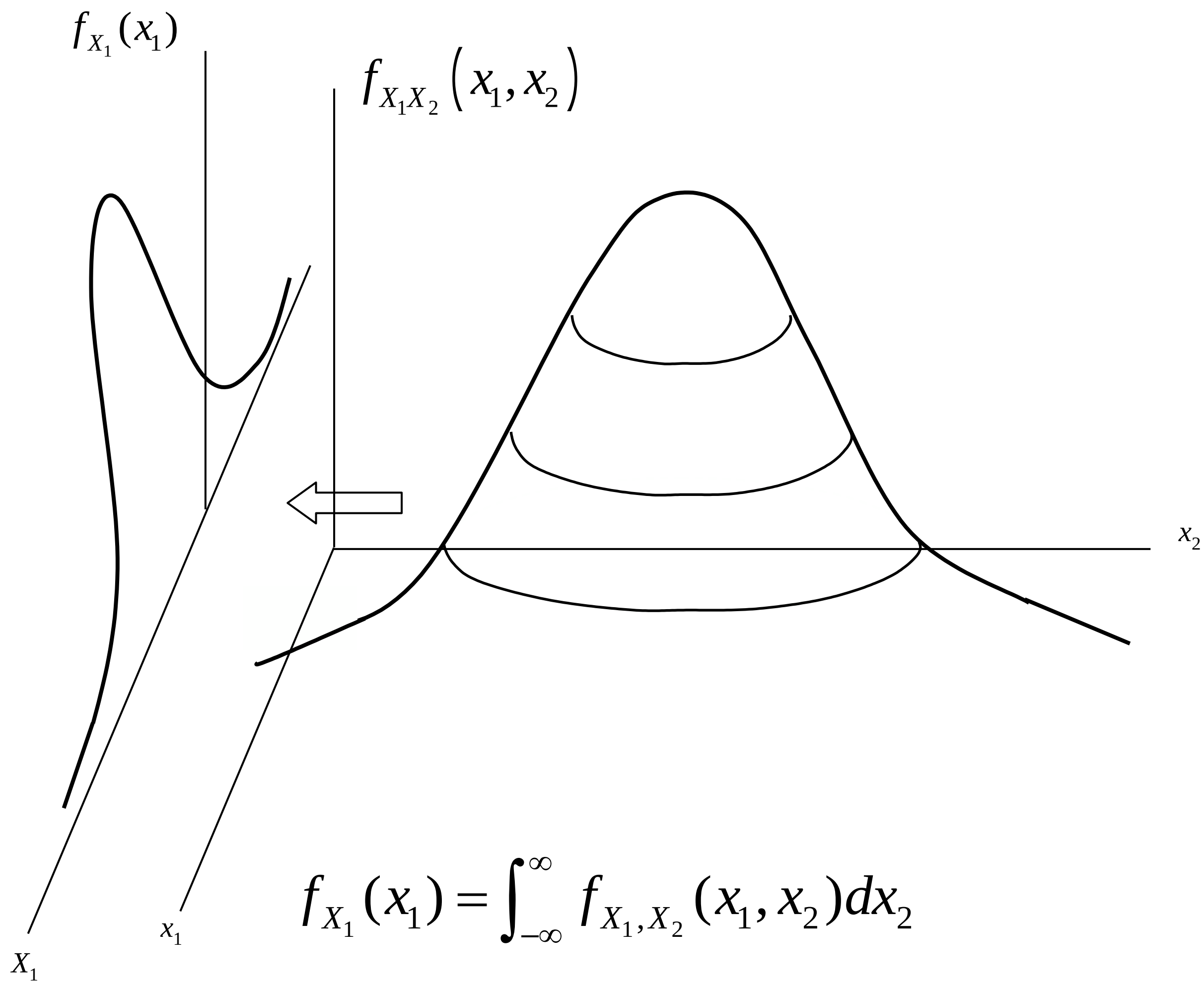
$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)dx_2$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)dx_1$$

Hatırlatma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(x_2)dx_2 = 1 \qquad = 1$$

Marjinal oyf'nin projeksiyon olarak yorumu:



$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\,dx_2$$

Örnek:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\begin{cases} ce^{-x_1}e^{-2x_2}, & 0\le x_1\le x_2<\infty \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

(a) c nedir?

$$1=c\int_0^{\infty}\int_0^{x_2} e^{-x_1}e^{-2x_2}dx_1dx_2=c\int_0^{\infty}(1-e^{-x_2})e^{-2x_2}dx_2$$

$$1=c\left[\frac{e^{-2x_2}}{-2}-\frac{e^{-3x_2}}{-3}\right]_0^{\infty}$$

$$\frac{c}{6}=1 \quad\Rightarrow\quad c=6$$

<u>Örnek</u>: (devam)

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\begin{cases} 6e^{-x_1}e^{-2x_2}, & 0\le x_1\le x_2<\infty \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

(b) $f_{X_1}(x_1)$'i bulun

$$f_{X_1}(x_1)=6\int_{x_1}^{\infty} e^{-x_1}e^{-2x_2}dx_2=3e^{-3x_1}, \qquad 0\le x_1<\infty$$

(c) $f_{X_2}(x_2)$'yi bulun

$$f_{X_1}(x_1)=6\int_{0}^{x_2} e^{-x_1}e^{-2x_2}dx_1=6e^{-2x_2}(1-e^{x_2}), \qquad 0\le x_2<\infty$$

Ortak kdf'nin özellikleri

1. $F_{X_1,X_2}(-\infty,-\infty) = F_{X_1,X_2}(-\infty, x_2) = F_{X_1,X_2}(x_1,-\infty) = 0$

   $F_{X_1,X_2}(\infty,\infty) = 1$

2. Marjinal kdf ler

$$F_{X_1}(x_1) = F_{X_1,X_2}(x_1,\infty)$$
$$F_{X_2}(x_2) = F_{X_1,X_2}(\infty, x_2)$$

3. Eğer $a_1 > a_2$ ve $b_1 > b_2 \Rightarrow$

$$F_{X_1,X_2}(a_1,b_1) \geq F_{X_1,X_2}(a_2,b_2)$$

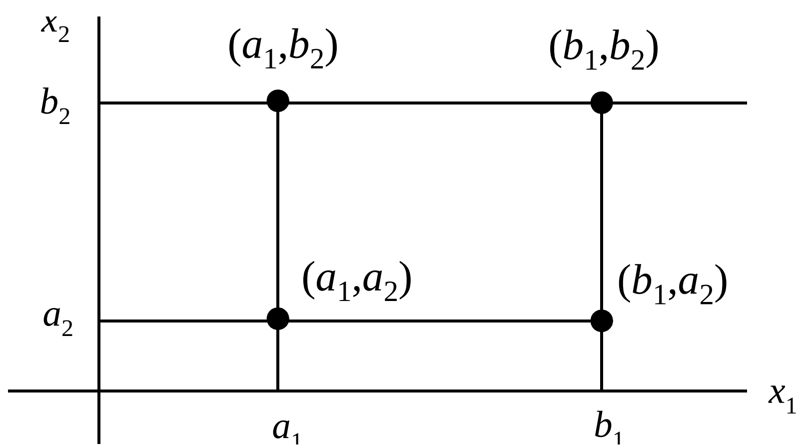
monotonik olarak azalmayan fonksiyon

Ortak kdf'nin özellikleri (devam)

4. $$\lim_{x_1 \to a^+} F_{X_1 X_2}\left(x_1, x_2\right) = F_{X\ X}\left(a, x_2\right),$$ Sağdan sürekli

$$\lim_{x_2 \to b^+} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1, X_2}(x_1, b)$$ Üstten sürekli

5. $$\Pr\left[a_1 < X_1 \le b_1, a_2 < X_2 \le b_2\right] = F_{X_1, X_2}(b_1, b_2) - F_{X_1, X_2}(a_1, b_2) - F_{X_1, X_2}(b_1, a_2) - F_{X_1, X_2}(a_1, a_2)$$

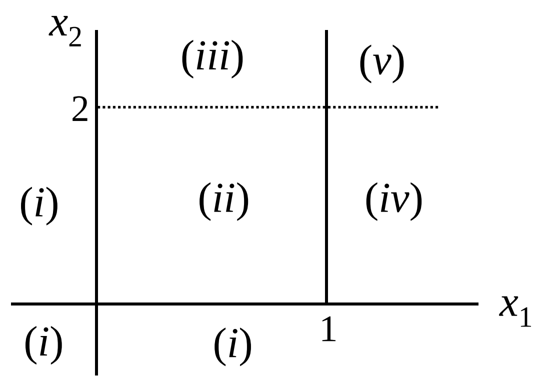


<u>Örnek</u>:

$$\mathrm{f}_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\begin{cases}0.5, & 0\le x_1\le 1, 0\le x_2\le 2\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

Ortak kdf'yi bulun

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\Pr\left[X_1\le x_1, X_2\le x_2\right]=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2}(z_1,z_2)dz_2dz_1$$



<u>*Durum i*</u> $x_1<0$ veya $x_2<0$ veya $x_1, x_2<0$

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=0$$

<u>*Durum ii*</u> $0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 2$

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} dz_2 dz_1 = \frac{1}{2}x_1 x_2$$

<u>*Durum iii*</u> $0 \le x_1 \le 1,\ x_2 > 2$

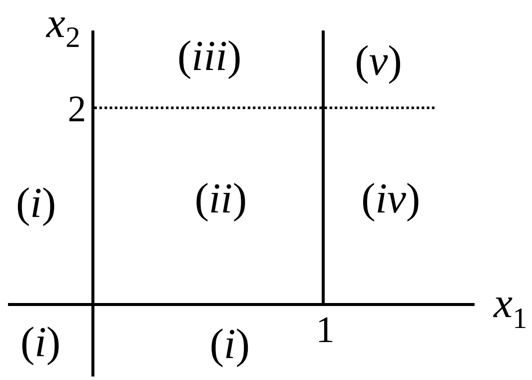
$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\int_0^{x_1}\int_0^{2} dz_2 dz_1 = x_1$$

<u>*Durum iv*</u> $x_1 > 1,\ 0 \le x_2 \le 2$

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\int_0^{1}\int_0^{x_2} dz_2 dz_1 = \frac{1}{2}x_2$$

<u>*Durum v*</u> $x_1 > 1,\ x_2 > 2$

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\int_0^{1}\int_0^{2} dz_2 dz_1 = 1$$



Rastgele değişkenlerin bağımsızlığı

X_1 , X_2 gibi iki rastgele değişken aşağıdaki özellik sağlanırsa *bağımsızdır* denir

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2), \qquad \forall\ x_1, x_2$$

veya

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2), \qquad \forall\ x_1, x_2$$

<u>Örnek</u>:

$$\mathrm{f}_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\begin{cases}6e^{-x_1}e^{-2x_2}, & 0\le x_1\le x_2\le\infty\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

$$\mathrm{f}_{X_1}(x_1)=6\int_{x_1}^{\infty}e^{-x_1}e^{-2x_2}\,dx_2=3e^{-3x_1},\quad 0\le x_1\le\infty$$

$$\mathrm{f}_{X_1}(x_1)=6\int_{0}^{x_2}e^{-x_1}e^{-2x_2}\,dx_1=6e^{-2x_2}(1-e^{-x_2}),\quad 0\le x_2\le\infty$$

$$f_{X_1X_2}\left(x_1,x_2\right)\overset{?}{=}f_{X_1}\left(x_1\right)f_{X_2}\left(x_2\right)$$

$$6e^{-x_1}e^{-2x_2}\neq 18e^{-3x_1}e^{-2x_2}(1-e^{-x_2})$$

$\Rightarrow$bağımzsız değil

<u>Örnek</u>:

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\begin{cases}1-e^{-ax_1}-e^{-bx_2}+e^{-(ax_1+bx_2)}, & x_1\geq 0, x_2\geq 0\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

(a) Marjinal kdf’leri bulun

$$F_{X_1}(x_1)=F_{X_1,X_2}(x_1,\infty)=1-e^{-ax_1}, \qquad x_1\geq 0$$

$$F_{X_2}(x_2)=F_{X_1,X_2}(\infty,x_2)=1-e^{-bx_2}, \qquad x_2\geq 0$$

(b) Marginal oyf’leri (a) şıkkından bulun

$$f_{X_1}(x_1)=\frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1}=ae^{-ax_1}, \qquad x_1\geq 0$$

$$f_{X_1}(x_1)=\frac{dF_{X_2}(x_2)}{dx_2}=be^{-bx_2}, \qquad x_2\geq 0$$

<u>Örnek</u>: (devam)

(c) X_1, X_2 bağımsız mı? kdf'leri kullanın

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \stackrel{?}{=} F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$

$$1-e^{-ax_1}-e^{-bx_2}+e^{-(ax_1+bx_2)}=(1-e^{-ax_1})(1-e^{-bx_2})$$

Evet, bağımsız...

(d) Bağımsızlığı oyf'leri kullanarak gösterin

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{\partial F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}=abe^{-ax_1}e^{-bx_2}, \qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \stackrel{?}{=} f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2)$$

$$abe^{-ax_1}e^{-bx_2}=ae^{-ax_1}be^{-bx_2}$$

Evet, bağımsız...

Şartlı oyf

Verilen X_1 ve X_2 gibi iki rastgele değişken için şu şartlı yoğunluklar yazılabilir:

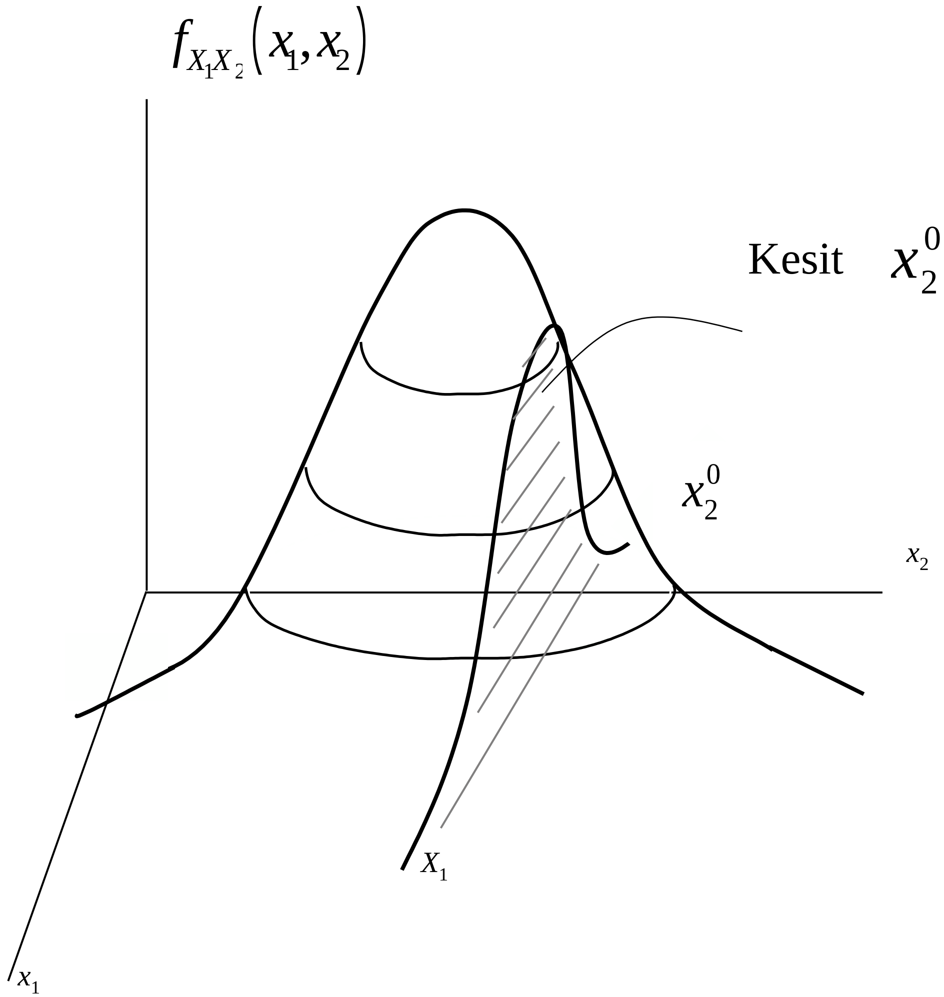
$$f_{X_1|X_2}(x_1 | x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

$$f_{X_2|X_1}(x_2 | x_1) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$$

Burada

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1|X_2}(x_1 | x_2)dx_1 = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1|X_2}(x_1 | x_2)dx_2 = ???$$

Şartlı oyf'nin ortak oyf'den bir dilim olarak yorumu:



$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2^0)=\frac{f_{X_1X_2}(x_1,x_2^0)}{f_{X_2}(x_2^0)}$$

<u>Örnek</u>:

$$\mathrm{f}_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\begin{cases}6e^{-x_1}e^{-2x_2}, & 0\le x_1\le x_2\le\infty\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

$$\mathrm{f}_{X_1}(x_1)=6\int_{x_1}^{\infty}e^{-x_1}e^{-2x_2}\,dx_2=3e^{-3x_1},\quad 0\le x_1\le\infty$$

$$\mathrm{f}_{X_1}(x_1)=6\int_{0}^{x_2}e^{-x_1}e^{-2x_2}\,dx_1=6e^{-2x_2}(1-e^{-x_2}),\quad 0\le x_2\le\infty$$

Şartlı oyf’leri bulun

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)=\frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}=\frac{6e^{-x_1}e^{-2x_2}}{6e^{-2x_2}(1-e^{-x_2})}=\frac{e^{-x_1}}{1-e^{-x_2}},\quad 0\le x_1\le x_2$$

$$f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)=\frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)}=\frac{6e^{-x_1}e^{-2x_2}}{3e^{-3x_1}}=2e^{2x_1}e^{-2x_2},\quad x_1\le x_2\le\infty$$

Yoğunluklar için Bayes kuralı

X_1 ve X_2 gibi iki rd için şu yazılabilir:

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)\, f_{X_1}(x_1)}{f_{X_2}(x_2)}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1X_2}(x_1, x_2)dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)\, f_{X_1}(x_1)dx_1$$

olduğundan

$$\boxed{f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)\, f_{X_1}(x_1)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)\, f_{X_1}(x_1)dx_1}}$$

<u>Örnek</u>:

Şartlı oyf ve marjinal oyf'ler biliniyorsa:

$$f_{x_1}(x_1 | x_2) \frac{e^{-x_1}}{1-e^{-x_2}}, \qquad 0 \le x_1 \le x_2$$

$$f_{x_1}(x_1) = 6\int_{x_1}^{\infty} e^{-x_1} e^{-2x_2}\, dx_2 = 3e^{-x_1}, \qquad 0 \le x_1 \le \infty$$

$$f_{x_2}(x_2) = 6\int_{0}^{x_2} e^{-x_1} e^{-2x_2}\, dx_1 = 6e^{-2x_2}(1-e^{-x_2}), \qquad 0 \le x_2 \le \infty$$

B

$$f_{X_2|X_1}(x_2 | x_1) = \frac{f_{X_1|X_2}(x_1 | x_2)\, f_{X_2}(x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$$

$$= \frac{6e^{-x_1} e^{-2x_2}(1-e^{-x_2})}{3e^{-3x_1}(1-e^{-x_2})} = 2e^{2x_1} e^{-2x_2}, \qquad x_1 \le x_2 < \infty$$

İki rastgele değişkenin 1. ve 2. Momentleri

ortalama

m^2

$$\boxed{m_i = E\left[X_i\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{X_1X_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2, \quad i = 1,2}$$

variance

$$\boxed{\sigma_i^2 = \mathrm{Var}\left[X_i\right] = E\left[\left(X_i - m_i\right)^2\right], \quad i = 1,2}$$

ilinti

$$\boxed{r_{ij} = E\left[X_i X_j\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j f_{X_iX_j}(x_i, x_j)dx_i dx_j, \quad i, j = 1,2}$$

covariance

$$\boxed{c_{ij} = \mathrm{Cov}\left[X_i, X_j\right] = E\left[\left(X_i - m_i\right)\left(X_j - m_j\right)\right], \quad i, j = 1,2}$$

İlinti/Kovaryans Bağıntıları

$$c_{ij} = r_{ij} - m_i m_j$$

$$\mathrm{Cov}\left[X_i, X_j\right] = E\left[X_i X_j\right] - E\left[X_i\right] \cdot E\left[X_j\right]$$

Cov[X_i,X_j] = 0 olmasi durumunda then X_i ve X_j ilintisizdir denir.

Bu durumda

$$E\left[X_1 X_2\right] = E\left[X_1\right] E\left[X_2\right]$$

olur.

($E[X_i X_j] = 0$ olması durumunda rastgele değişkenler *ortogonal* dir denir.)

İki rastgele değişken için diğer bağıntılar

<u>Bağımsız</u> rastgele değişkenler <u>ilintisizdir</u>:

<u>İspat</u>

$$E\left[X_1 X_2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X_1 X_2}(x_1 x_2)\,dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\,dx_1 dx_2$$

(bağımsızlıktan dolayı)

$$E\left[X_1 X_2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1)\,dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2}(x_2)\,dx_2 = E\left[X_1\right]E\left[X_2\right]$$

$\therefore\ X_1$ ve X_2 ilir

<u>tersi doğru değildir</u> (Gausyen rastgele değişkenler hariç)

İlinti Bağıntılarının Özeti

- Cov [X_1, X_2] =0 $\Rightarrow$ X_1 ve X_2 ilintisizdir
- E [X_1X_2] =0 $\Rightarrow$ X_1 ve X_2 ortogonaldir
- X_1 ve X_2 nin ilinti katsayısı şu şekilde tanımlanır

$$\rho = \frac{E\left[\left(X_1 - m_1\right)\left(X_2 - m_2\right)\right]}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} = \frac{\mathrm{Cov}\left[X_1, X_2\right]}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}$$

$$-1 \le \rho \le 1$$