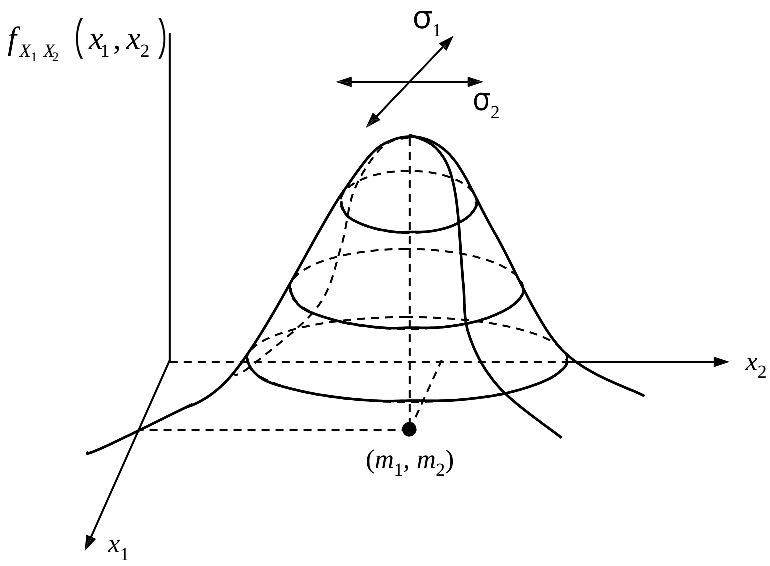
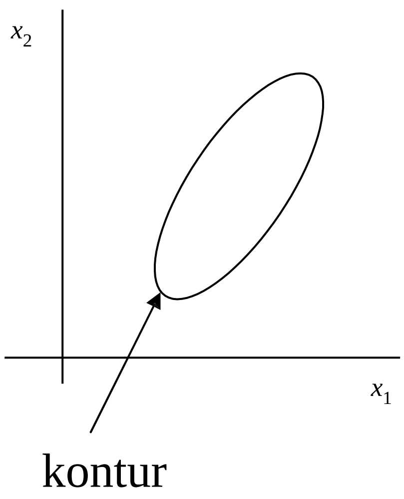
İki Değişkenli (Bivariate) Gausyen OYF (Ortak Gausyen yoğunluk fonksiyonu)





$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]$$

İki Değişkenli (Bivariate) Gausyen OYF, devam.

Marjinal yoğunluklar

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp - \left[\frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2} \right] \qquad i = 1, 2$$

Şartlı yoğunluk

$$f_{X_1|X_2}(x_i \mid x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp - \left[\frac{(x_1 - \mu(x_2))^2}{2\sigma^2} \right]$$

burada

$$\sigma^2 = \sigma_1^2(1-\rho^2) \;\text{ ve }\; \mu(x_2) = m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - m_2)$$

İki Rastgele Değişkenin (Rastgele Vektör) Beklenen Değeri

Kompakt notasyon kullanılırsa

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad 2\times 1 \text{ vektör}, \qquad f_X(x), F_X(x)$$

$$E\left[\gamma(\mathbf{X})\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x) f_X(x) dx$$

$$E\left[\gamma(X_1, X_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x_1, x_2) f_{X_1X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$E\left[\mathbf{X}\right] = E\left[\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \mathbf{m}_X \qquad 2\times 1 \text{ vektör}$$

İkinci moment (**ilinti matrisi**)

$$\mathbf{R}_X = E\left[\mathbf{X}\mathbf{X}^T\right] = E\left[\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} X_1 X_1 & X_1 X_2 \\ X_2 X_1 & X_2 X_2 \end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix} E\left[X_1^2\right] & E\left[X_1 X_2\right] \\ E\left[X_2 X_1\right] & E\left[X_2^2\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

X_1 ve X_2 nin ilintisi şu şekilde ifade edilir

$$r_{ij} = E\left[X_i X_j\right] \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \qquad i = 1, 2;\ j = 1, 2$$

İkinci merkezi moment (**kovaryans matrisi**)

$$\mathbf{C}_X = E\left[(\mathbf{X}-\mathbf{m}_X)(\mathbf{X}-\mathbf{m}_X)^T\right]$$

$$= \begin{bmatrix} E\left[(X_1-m_1)^2\right] & E\left[(X_1-m_1)(X_2-m_2)\right] \\ E\left[(X_2-m_2)(X_1-m_1)\right] & E\left[(X_2-m_2)^2\right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

X_1 ve X_2 nin kovaryansı şu şekilde ifade edilir

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}\left[X_i, X_j\right] = E\left[(X_i-m_i)(X_j-m_j)\right]$$

Hatırlatma - $c_{ii} = \sigma_{X_i}^2 = \mathrm{Var}\left[X_i\right]$

Önemli bir bağıntı:

$$\mathbf{C}_X = \mathbf{R}_X - \mathbf{m}_X \mathbf{m}_X^T$$

İspat:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_X &= E\left[\left(\mathbf{X}-\mathbf{m}_X\right)\left(\mathbf{X}-\mathbf{m}_X\right)^T\right] \\
&= E\left[\mathbf{X}\mathbf{X}^T\right] - E\left[\mathbf{X}\right]\mathbf{m}_X^T - \mathbf{m}_X E\left[\mathbf{X}^T\right] + \mathbf{m}_X\mathbf{m}_X^T \\
&= \mathbf{R}_X - \mathbf{m}_X\mathbf{m}_X^T - \mathbf{m}_X\mathbf{m}_X^T + \mathbf{m}_X\mathbf{m}_X^T \\
&= \mathbf{R}_X - \mathbf{m}_X\mathbf{m}_X^T
\end{aligned}$$

Bileşenler formunda: $c_{ij} = r_{ij} - m_i m_j$

(bunu daha önce görmüştük)

İki Değişkenli Gausyen Rastgele Değişkenler $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$

X_1 ve X_2 ortak Gausyen r.d. ler olsun

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_X = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_X = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \operatorname{cov}(X_1, X_2) \\ \operatorname{cov}(X_1, X_2) & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$N \times 1$ vektör için Gausyen oyf

$$f_X(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |C_X|^{1/2}} e^{-1/2(\mathbf{x}-\mathbf{m}_X)^T C_X^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_X)}$$

$N = 2$ ve $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ için

$$\mathbf{C}_X = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \operatorname{cov}(X_1, X_2) \\ \operatorname{cov}(X_1, X_2) & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

burada $\rho = \operatorname{cov}(X_1, X_2) / \sigma^2$

Örnek:

(a) $N = 2,\ \sigma^2 = 4,\ \rho = 0.8,\ \mathbf{m}_X = 0$

$$\left|\mathbf{C}_X\right|^{1/2} = \sigma^2\sqrt{1-\rho^2} = 2.4,$$

$$\mathbf{C}_X^{-1} = \frac{1}{\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1.44}\begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{C}_X^T\mathbf{x} = \frac{1}{2.88}\begin{bmatrix} x_1 - 0.8x_2 & -0.8x_1 + x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{4.8\pi} e^{-\left(x_1^2 - 1.6x_1x_2 + x_2^2\right)/2.88}$$

(b) X_1 ve X_2 bağımsızsa $\rho = 0,\ \mathbf{m}_X = 0,\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\left(x_1^2 + x_2^2\right)/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x_1^2/2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x_2^2/2\sigma^2}$$

İki r.d. nin fonksiyonu

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \;\rightrightarrows\; \boxed{\;g(\cdot)\;} \;\rightrightarrows\; \mathbf{Y}=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = g\left(\mathbf{X}\right) = g\left(X_1, X_2\right)$$

$$f_{\mathbf{Y}}\left(\mathbf{y}\right) = \left|J\left(\mathbf{y}\right)\right| f_{\mathbf{X}}\left(x\right)\Big|_{\mathbf{x}=g^{-1}\left(\mathbf{y}\right)}$$

İki r.d.

$$\left|J\left(y_1, y_2\right)\right| = \left\|\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\[2ex] \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{\left|J\left(x_1, x_2\right)\right|}$$

Tek r.d.

$$\left|J(y)\right| = \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Örnek:

X_1, X_2 sıfır ortalamalı, σ^2 varyanslı Gausyen r.d. lerdir

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-x_1^2/2\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-x_2^2/2\sigma^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\left(x_1^2+x_2^2\right)/2\sigma^2}, \qquad -\infty<x_1,x_2<\infty$$

Çıktı

$$\begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{x_1^2+x_2^2} \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right) \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} r\geq 0,\ \text{mesafe} \\ \theta=[0,2\pi],\ \text{açı} \end{matrix}$$

Örnek: (devam)

Ters eşleme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\left|J\left(r,\theta\right)\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Çıktı vektörünün ortak yoğunluk fonksiyonu

$$f_{R\theta}(r,\theta) = r\cdot\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot e^{-r^2/2\sigma^2}, \qquad r\geq 0,\;\; 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

<u>Örnek</u>: (devam)

R'nin marjinal yoğunluk fonksiyonu

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R\theta}(r,\theta)d\theta = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}, \qquad r \geq 0 \qquad \text{Rayleigh r.d.}$$

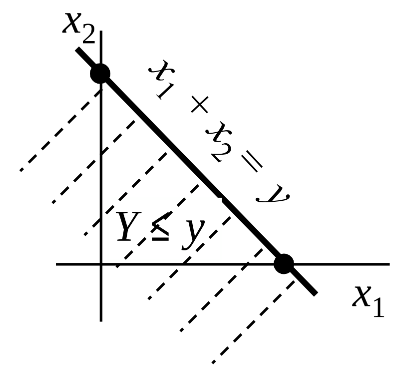
θ nın marjinal yoğunluk fonksiyonu

$$f_\theta(\theta) = \int_0^{\infty} f_{R\theta}(r,\theta)dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} dr$$

$$= \frac{1}{2\pi}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad \text{Birbiçim r.d.}$$

<u>**İki rastgele değişkenin toplamı**</u> $Y = X_1 + X_2$

Y'nin oyf sini kdf'sinden bulalım



$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr[X_1 + X_2 \leq y]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_1X_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_1X_2}(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1$$

$dx\ dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1X_2}(x_1, y - x_1) dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(y - x_1) dx_1 \quad X_1, X_2 \text{ bağımsızsa}$$

Bağımsız iki rastgele değişkenin toplamı: Toplamın oyf si bileşenlerin oyf'lerinin <u>konvolusyonudur</u>.

<u>**Örnek**</u>**:**

X_1, X_2 sırasıyla iki ampulun ömürleri olsun.

Ampullerin birlikte ömrü : $Y = X_1 + X_2$.

X_i, $i = 1, 2$ için oyf: $\qquad f_{X_i}(x_i) = \lambda e^{-\lambda x_i} \qquad x_i \geq 0$

$$f_Y(y = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(y - x_1) dx_1$$

X_1 ve X_2 oyf lerini yerine koyarsak

$$f_Y(y = \int_0^y \lambda e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda e^{-\lambda(y - x_1)} dx_1$$

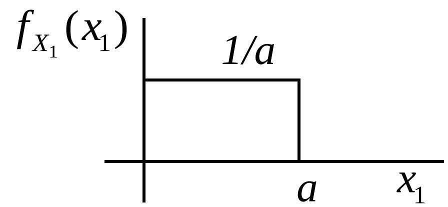
$$= \lambda^2 e^{-\lambda y} \int_0^y dx_1 = \lambda^2 y e^{-\lambda y}, \qquad y \geq 0$$

(Y 2-Erlang r.d. dir)

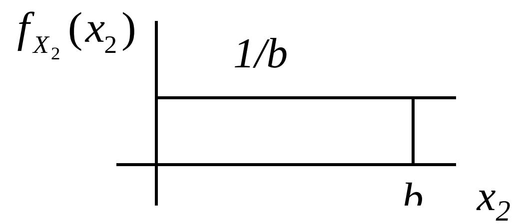
Örnek:

$Y = X_1 + X_2$ gibi iki r.d. nin toplamı olsun. $f_{X_1}(x_1)$ [0, a] arasında ve $f_{X_2}(x_2)$ [0, b] arasında birbiçimdir. $0 < a < b$

$$f_Y(y = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(y - x_1)\, dx_1$$



Durum 1 $y < 0$, $f_Y(y) = 0$

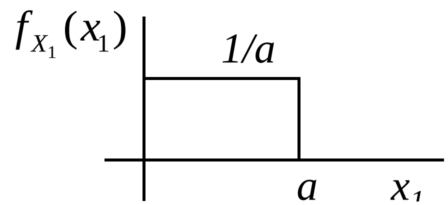


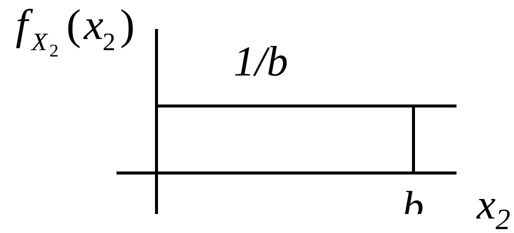
Case 2 $0 \leq y < a$

$$f_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\, dx_1 = \frac{1}{ab}\, y$$

<u>Durum 3</u> $a \leq y < b$

$$f_Y(y) = \int_0^a \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\, dx_1 = \frac{1}{b}$$



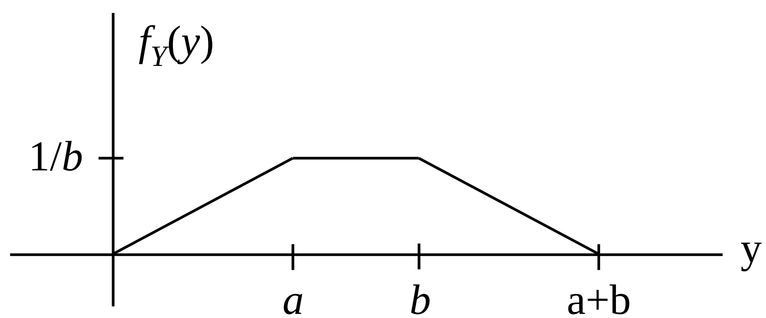


<u>Durum 4</u> $b \leq y \leq a + b$

$$f_Y(y) = \int_{y-b}^{a} \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\, dx_1 = \frac{1}{ab}\, x_1 \Big|_{y-b}^{a} = \frac{1}{ab}\left[a + b - y\right]$$

<u>Durum 5</u> $y > a + b$

$$f_Y\left(y\right) = 0$$



r.d. lerin toplami

X_1, X_2, …, X_n n tane rastgele değişken olsun ve toplamları şu şekilde verilsin

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Y'nin ortalaması

$$E[X_1 + \cdots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} [X_i]$$

Y'nin varyansı (basitlik açısından n = 2 seçelim)

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X_1+X_2) &= E\left[\left(X_1+X_2-E[X_1]-E[X_2]\right)^2\right] \\ &= E\left[\left((X_1-m_1)+(X_2-m_2)\right)^2\right] \\ &= E\left[(X_1-m_1)^2\right]+E\left[(X_2-m_2)^2\right]+2E\left[(X_1-m_1)(X_2-m_2)\right] \\ &= \operatorname{var}(X_1)+\operatorname{var}(X_2)+2\operatorname{cov}(X_1,X_2)\end{aligned}$$

Genellersek

$$\operatorname{var}(X_1+X_2+\cdots X_n)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{var}(X_i)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)$$

İlintisiz r.d. ler için varyans

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

X_i ve X_j ilintisiz ise ($i \neq j$), kovaryans sıfırdır:

$$E\left[\left(X_i - m_X\right) + \left(X_j - m_X\right)\right] = \mathrm{cov}\left(X_i, X_j\right) = 0$$

Bu yüzden

$$\boxed{\mathrm{var}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\left(X_i\right)}$$

ilintisiz r.d.'ler için

- Bağımsız rastgele değişkenler ilintisizdir.

IID Rastgele Değişkenler

Bağımsız ve özdeşçe dağılmış (IID) r.d. ler karşılıklı olarak bağımsızdırlar ve hepsi aynı oyf/kdf ye sahiptirler.

X_1, X_2, … X_n IID olsun ve her biri m_X ortalamasına σ_X^2 varyansına sahip olsun

Bu durumda

$$E\left[X_1+\cdots+X_n\right]=\sum_{i=1}^{n}E\left[X_i\right]=nm_X$$

X_i ve X_j bağımsız olduğundan ($i \neq j$), kovaryans sıfırdır:

$$E\left[\left(X_i-m_X\right)+\left(X_j-m_X\right)\right]=\mathrm{cov}\left(X_i,X_j\right)=0$$

Sonuç olarak

$$\mathrm{var}\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}\left(X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_X^2=n\sigma_X^2$$

İki r.d. nin toplamının OYF si

$Y = X_1 + X_2$ ve

X_1 ve X_2 *<u>bağımsız</u>* r.d. ler olsun.

Y nin moment üreten fonksiyonu

$$M_Y(s) = E\left[e^{sY}\right] = E\left[e^{s\left(X_1+X_2\right)}\right] = E\left[e^{sX_1 sX_2}\right]$$

$$= E\left[e^{sX_1}\right]E\left[e^{sX_2}\right] \quad \Leftarrow X_1 \text{ ve } X_2 \text{ bağımsız olduğundan}$$

$$= M_{X_1}(s)M_{X_2}(s)$$

Buradan: $f_Y = f_{X_1} * f_{X_2}$

Genelleme

$X_1 + X_2, \ldots, X_n$ bağımsız r.d. ler olsun

$$\boxed{Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n}$$

Moment üreten fonksiyon

$$M_Y(s) = E\left[e^{sY}\right] = E\left[e^{s(X_1+X_2+\cdots X_n)}\right]$$

$$= E\left[e^{sX_1 sX_2} \cdots e^{sX_n}\right] \quad \Leftarrow \; X_1 \text{ ve } X_2 \text{ bağımsız olduğundan}$$

$$= E\left[e^{sX_1}\right]E\left[e^{sX_2}\right]\cdots E\left[e^{sX_n}\right]$$

$$= M_{X_1}(s)M_{X_2}(s)\cdots M_{X_n}(s)$$

$M_Y(s) \Leftrightarrow f_y(y)$ olduğundan:

$$f_Y = f_{X_1} * f_{X_2} * \cdots * f_{X_n}$$

<u>Örnek</u>:

$X_1 + X_2, \ldots, X_n$ m_i ortalamalı σ_i^2 varyanslı bağımsız Gausyen r.d. ler ve $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ olsun

$$m_Y = m_1 + m_2 + \cdots + m_n \quad \text{ve} \quad \sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$$

ise $f_Y(y)=?$.

Moment üreten fonksiyon sadece $j\omega$ ekseni üzerinde yakınsar. Bu yüzden, $s = j\omega$ olsun. Bu durumda X_i nin karakteristik fonksiyonu

$$M_X(j\omega) = e^{-j\omega m_i + \omega^2\sigma_i^2/2} \quad \Leftrightarrow \quad f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-(x_i - m_i)^2/2\sigma_i^2}$$

Örnek (devam):

$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ için karakteristik fonksiyon

$$M_Y(j\omega) = M_{X_1}(j\omega)M_{X_2}(j\omega)\cdots M_{X_n}(j\omega)$$

$$= e^{-j\omega(m_1+m_2+\cdots+m_n)+\omega^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2\right)/2}$$

Gözlem yaparak şu yazılabilir

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2\right)}}\, e^{-\frac{\left(y-m_1-m_2-\cdots-m_n\right)^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2\right)}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\, e^{-\frac{\left(y-m_y\right)^2}{2\sigma_Y^2}}$$

Bağımsız Gausyen rastgele değişkenlerin toplamı da *Gausyen dir*