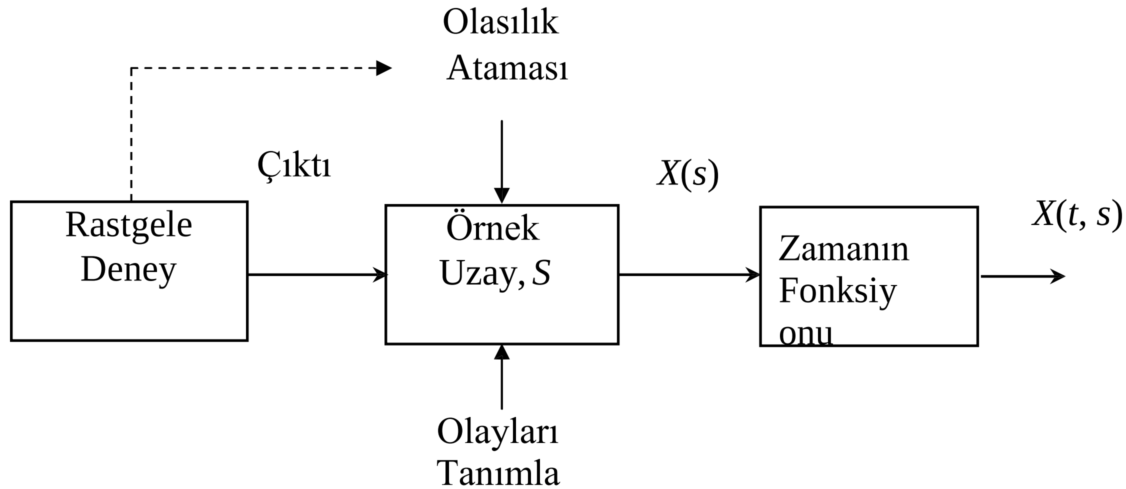
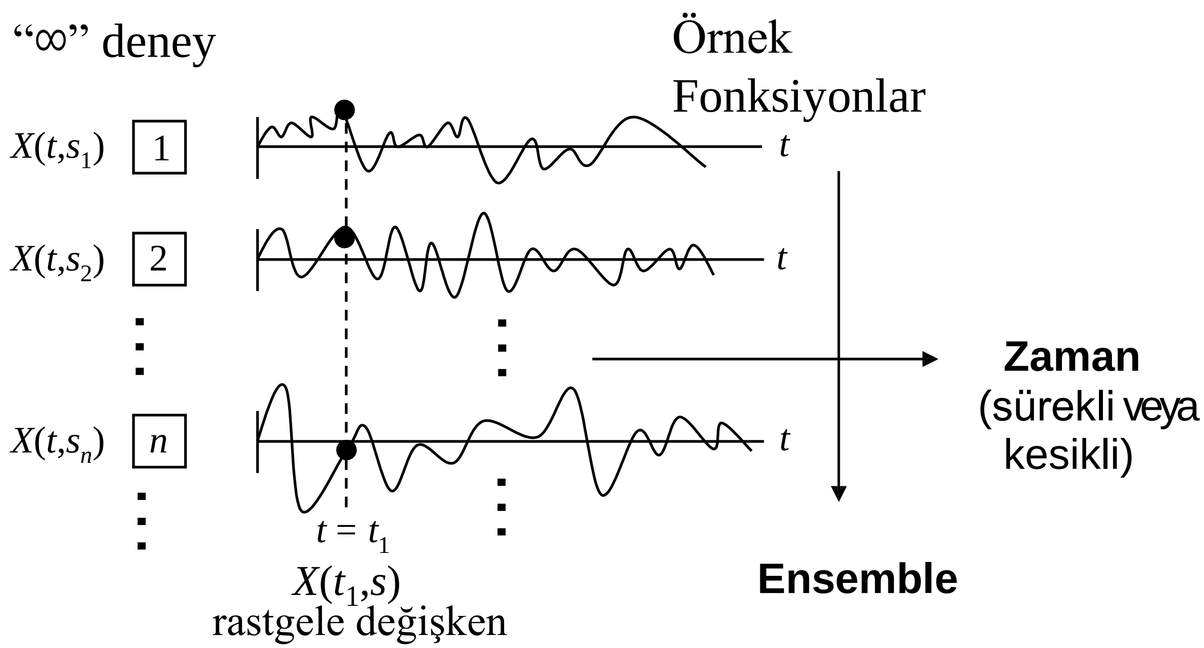
Rastgele Süreçler

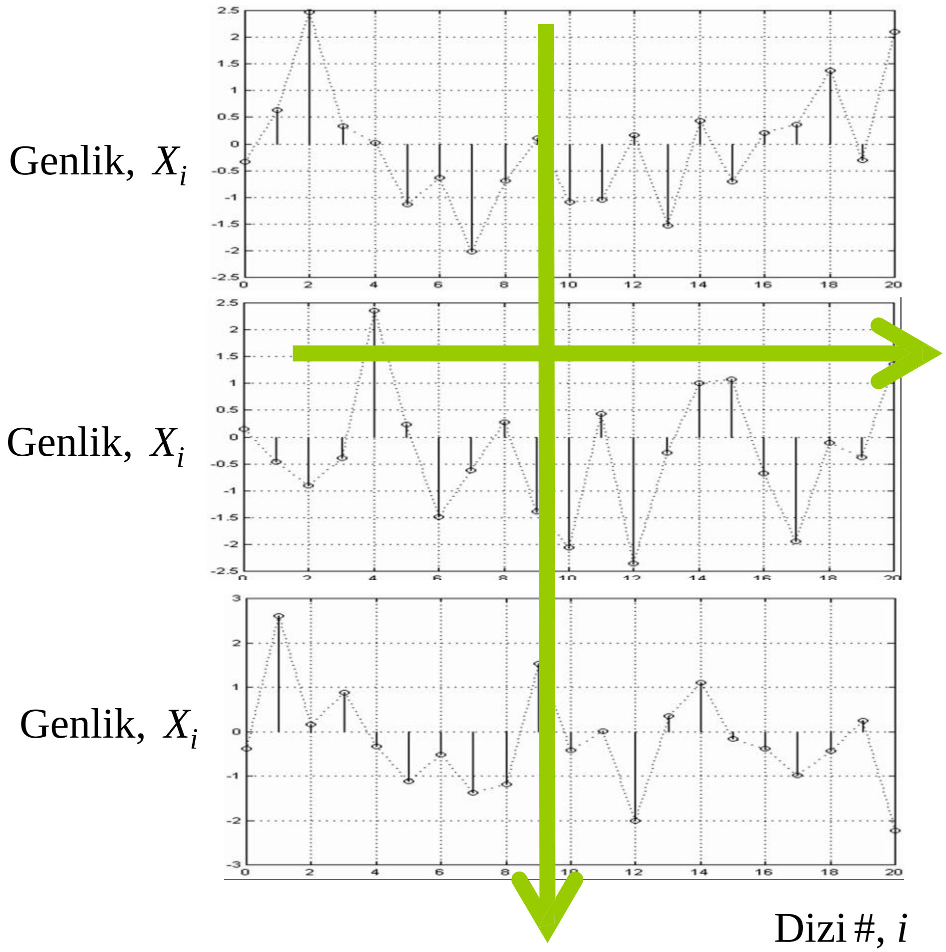


Rastgele süreç konsepti (Ensemble)



Rastgele Değişken Dizilerinin Gerçeklenmeleri

$$X(t_i) = 0.5\cos(\omega t_i) + N(t_i), \qquad m_N = 0; \qquad \sigma_N^2 = 1;$$



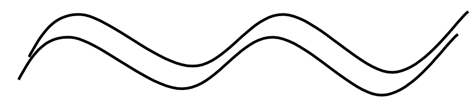
Rastgele Süreçlerle İlgili Noktalar

- OYF r.d. ile ilişkilidir — ensemble üzerinden.
- Beklenen değer ensemble üzerinden alınır.
- Fiziksel bir deneyde, genellikle sadece bir örnek fonksiyon vardır.
- Eğer “ensemble” ı “zaman” ekseniyle ilişkilendirebilirsek, rastgele süreçler teorisi rastgele sinyallerin zaman dalga şekillerinin analizine uygulanabilir.

Örnek:

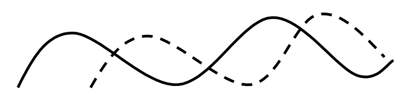
(1) $S = \{s: -1 \leq s \leq 1\}$ gibi bir örnek uzayı olsun

Bir rastgele süreç tanımlayalım



$$X(t,s) = s\cos(2\pi t), \qquad -\infty < t < \infty$$

(2) Başka bir rastgele süreç tanımlayalım



$$X(t,s) = \cos(2\pi t + s), \qquad -\pi < t < \pi$$

<u>Kesikli-zaman formu:</u>

$$X[n,s] = s\cos[2\pi n]$$

$$X[n,s] = \cos[2\pi n + s]$$

Bir Rastgele Sinyalin OYF si ve KDF si

Her bir $X(t_i)$ örneği bir zaman noktası t_i de bir r.d. dir, yani, oyf si vardır.

$$X_i = X(t_i) \text{ bir r.d. dir} \quad \Rightarrow \quad f_{X_i}(x_i)$$

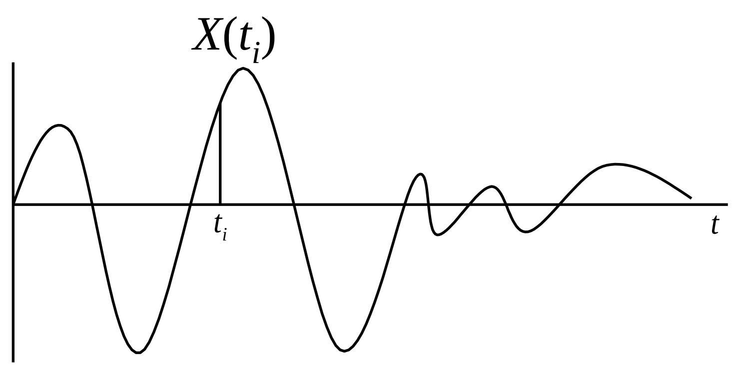
İki nokta X_i, X_j nın ortak oyf si vardır:

$$X_i = X(t_i), \qquad X_j = X(t_j) \quad \Rightarrow \quad f_{X_i X_j}(x_i, x_j)$$

Bunu aşağıdaki şekilde karakterize edilen n noktaya genişletebiliriz

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \text{rastgele vektör}$$

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \quad F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$$



Rastgele Süreçlerin Momentleri (*Sürekli Zaman*)

Rastgele sürecin **Ortalaması** (birinci moment)

$$m_X(t) = E\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X(t)}(x)\; dx$$

Rastgele sürecin **Otokorelasyon** fonksiyonu (ikinci moment)

$$R_X(t_1,t_0) = E\left[X(t_1)X(t_0)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_0\; f_{X(t_1)X(t_0)}(x_1 x_0)\; dx_1 dx_0$$

$$C_X(t_1,t_0) = E\Big[\big(X(t_1) - m_X(t_1)\big)\big(X(t_0) - m_X(t_0)\big)\Big]$$

$$= R_X(t_1,t_0) - m_X(t_1)m_X(t_0)$$

$t_1 = t_0$ olduğunda

$$R_X(t_0,t_0) = E\left[X^2(t_0)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x_0^2\; f_{X(t_0)} x_0\; dx_0$$

$$C_X(t_0,t_0) = E\Big[\big(X(t_0) - m_X(t_0)\big)^2\Big] = \sigma_X^2(t_0)$$

Rastgele Süreçlerin Momentleri (*devam*)

İlinti katsayısı

$$\rho_X(t_1,t_0)=\frac{C_X(t_1,t_0)}{\sigma_X^2(t_1)\sigma_X^2 t_0)}=\frac{C_X(t_1,t_0)}{\sqrt{C_X(t_1,t_1)}\sqrt{C_X(t_0,t_0)}}$$

Bir Kesikli Zaman Rastgele Sürecin Momenti

Benzer ifadeler, sadece

$$m_X[n], \qquad R_X[n_1,n_0], \quad \cdots \text{vb.}$$

<u>Örnek</u>: $X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, φ birbiçim $[-\pi, \pi]$

$m_X(t)$ ve $R_X(t_1,t_0) = ?$

$$m_X(t) = E\left[X(t)\right] = A\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega t + \phi)\,\frac{d\phi}{2\pi} = 0, \quad \text{zamandan bağımsız}$$

$$R_X(t_1,t_0) = \left[X(t_1)X(t_0)\right] = \int_{-\pi}^{\pi} A\cos(\omega t_1 + \phi)A\cos(\omega t_0 + \phi)\,\frac{d\phi}{2\pi}$$

$$= \frac{A^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\omega(t_1 - t_0)\right)d\phi + \frac{A^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\omega(t_1 + t_0) + 2\phi\right)d\phi$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos\left(\omega(t_1 - t_0)\right), \quad t_1 - t_0 \text{ ın fonksiyonu}$$

$t_1 - t_0 = \tau$ için

$$R_X(t_1,t_0) = \frac{A^2}{2}\cos\left(\omega\tau\right) = R_X\left(\tau\right), \quad \tau\text{'ya gecikme denir}$$

Örnek: $m[n]=3, \quad R_X[n_1,n_0]=9+4e^{-0.2|n_1-n_0|}$ olmak üzere $X[n]$ kesikli zaman rastgele süreçtir:

$X_1 = X[8]$ ve $X_0 = X[5]$ ın ortalama, varyans ve kovaryansını bulun.

Ortalama: $m_0 = m[5] = 3 \qquad m_1 = m[8] = 3$

Varyans: $E\left[X_0^2\right] = R_X[5,5] = 13, \quad E\left[X_1^2\right] = R_X[8,8] = 13$

$$\sigma_1^2 = \sigma_0^2 = 13 - 3^2 = 4$$

Kovaryans:

$$\operatorname{cov}(X_1, X_0) = C_X[8,5] = R_X[8,5] - m[8]m[5] = 11.195 - 3 \cdot 3 = 2.195$$

İlinti katsayısı:

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_0)}{\sigma_1 \sigma_0} = \frac{2.195}{2 \cdot 2} = 0.5488$$

Geniş Anlamda Durağan (W.S.S.) Rastgele Süreç

Sürekli Zaman

Aşağıdaki şartları sağlayan rastgele süreçlere w.s.s. rastgele süreç denir

(1) $m_X(t) = m =$ sabit, her t için

(2) $R_X(t_1, t_0) = R_X(t_1 - t_0) = R_X(\tau), \quad \forall \quad t_1, t_0 \quad$ ve $\quad \tau = t_1 - t_0$

veya $C_X(t_1, t_0) = C_X(t_1 - t_0) = C_X(\tau), \quad \forall \quad t_1, t_0 \quad$ ve $\quad \tau = t_1 - t_0$

Kesikli zaman

Benzer ifadeler geçerlidir.

<u>Örnek</u>:

- $X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, φ birbiçim $[-\pi, \pi]$

$$R_X(t_1,t_0) = C_X(t_1,t_0) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega(t_1 - t_0)) \qquad \text{wss}$$

- Rastgele telegraf sinyali

$$m_X(t) = (2p-1)e^{-2\alpha t}$$

$$R_X(t_1,t_0) = e^{-2\alpha|t_1 - t_0|}$$

$$C_X(t_1,t_0) = e^{-2\alpha|t_1 - t_0|} - (2p-1)^2 e^{-2\alpha|t_1 + t_0|} \qquad \text{wss değil}$$

Ergodiklik

$X(t)$, $m_X(t) = m$ olan bir wss süreç olsun, Bu durumda $X(t)$;

- Aşağıdaki koşulu sağlarsa <u>ortalama ergodik</u> tir

$$\lim_{T\to\infty} \left\langle X(t) \right\rangle_T = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} X(t)\, dt = E\left[X(t)\right] = m : m$$

(Ortalama kare anlamında yakınsama.)

- Aşağıdaki koşulu sağlarsa <u>korelasyon ergodik</u> tir

$$\lim_{T\to\infty} \left\langle X(t)X(t-\tau) \right\rangle_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)X(t-\tau)\, dt$$

$$= E\left[X(t)X(t-\tau)\right] = R_X(\tau)$$

Zaman Ortalamaları ≡ Ensemble Ortalamaları

Örnek: $X(t) = A$, burada $A = \pm 1$ eşit olasılıkla:

$$m_X(t) = E[X(t)] = E[A] = 0;$$

$$\langle X(t) \rangle_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A\, dt = \frac{A}{2T} \int_{-T}^{T} dt = A$$

$m_X(t) \neq \langle X(t) \rangle_T$ olduğundan ortalama ergodik değildir.

Örnek: $X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ $\quad \varphi$ birbiçim $[-\pi, \pi]$

Ensemble ortalaması: $m_X(t) = E\left[X(t)\right] = AE\left[\cos\left(\omega t + \phi\right)\right] = 0$

Zaman ortalaması:

$$\left\langle X(t)\right\rangle_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt = \frac{A}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(\omega t + \phi)dt = \frac{A}{2T}\left.\frac{\sin(\omega t + \phi)}{\omega}\right|_{-T}^{T}$$

$$= \frac{A}{\omega 2T}\left[\sin(\omega T + \phi) - \sin(-\omega T + \phi)\right]$$

$$= \frac{2A}{\omega 2T}\sin\omega T\cos\phi; \qquad \lim_{T\to\infty}\frac{A}{\omega T}\sin\omega T\cos\phi = 0$$

Zaman ortalaması = Ensemble ortalaması
olduğundan ortalama ergodik

Örnek (devam)

Ensemble ortalaması: $R_X(\tau) = \dfrac{A^2}{2}\cos\omega t$

Zaman ortalaması:

$$\lim_{T\to\infty}\left\langle X(t)X(t-\tau)\right\rangle_T = \frac{A^2}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(\omega t+\phi)\cos(\omega(t-\tau)+\phi)\ dt$$

$$= \frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T}\cos(\omega t)\ dt + \frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T}\cos\big(\omega(2t-\tau)+2\phi\big)\ dt$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(\omega t) - \frac{A^2}{8\omega T}\Big[\sin\big(\omega(2t-\tau)+2\phi\big)\Big]_{-T}^{T}$$

$$\lim_{T\to\infty}\left\langle X(t)X(t-\tau)\right\rangle_T = \frac{A^2}{2}\cos\omega t$$

Zaman ortalamaları = Ensemble ortalamaları
olduğundan ortalama ve korelasyon ergodik

Beyaz Gürültü Süreci (*Sürekli Zaman*)

t_0 ve t_1 gibi keyfi zamanlarda alınmış $X(t_0)$ ve $X(t_1)$ örnekleri olan sıfır ortalamalı rastgele süreci ele alalım

Eğer bu örnekler her bir t_0 ve t_1 anlarında (bu anlar ne kadar yakın olursa olsun) ilintisiz kalıyorsa bu sürecin varyansı sonsuz olmalıdır.

İlinti ve kovaryans fonksiyonları aşağıdaki formdadır.

$$R_X\left(t_1,t_0\right)=C_X\left(t_1,t_0\right)=\frac{N_0}{2}\delta\left(t_1,t_0\right)$$

veya

$$\boxed{R_X(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta\left(\tau\right)}$$

Böyle bir sürece *beyaz gürültü* denir.

Örnek:

$X(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + W(t),$

- $W(t)$: beyaz gürültü (ortalama 0), güç yoğunluğu $N_0/2$
- φ: birbiçim $[-\pi, \pi]$; φ, W bağımsız

$$\begin{aligned}
R_X(t_1,t_0) &= E\left[X(t_1)X(t_0)\right] \\
&= E\left[\left\{A\cos\left(\omega t_1+\phi\right)+W(t_1)\right\}\left\{A\cos\left(\omega t_0+\phi\right)+W(t_0)\right\}\right] \\
&= A^2E\left[\cos\left(\omega t_1+\phi\right)\cos\left(\omega t_0+\phi\right)\right]+E\left[W(t_1)W(t_0)\right] \\
&\quad + AE\left[\cos\left(\omega t_1+\phi\right)W(t_0)\right]+AE\left[W(t_1)\cos\left(\omega t_0+\phi\right)\right]
\end{aligned}$$

W ve ϕ bağımsız olduğundan;

$$E\left[\cos\left(\omega t_1+\phi\right)W(t_0)\right]=E\left[\cos\left(\omega t_1+\phi\right)\right]E\left[W(t_0)\right]=0$$

Örnek (devam)

$$R_X(t_1,t_0) = A^2 E\left[\cos\left(\omega t_1+\phi\right)\cos\left(\omega t_0+\phi\right)\right] + E\left[W(t_1)W(t_0)\right]$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos\omega(t_1-t_0) + \frac{A^2}{2}E\left[\cos\omega(t_1+t_0)+2\phi\right] + \frac{N_0}{2}\delta(t_1-t_0)$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos\omega(t_1-t_0) + \frac{N_0}{2}\delta(t_1-t_0)$$

veya

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega\tau + \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

Otokorelasyon Fonksiyonunun Özellikleri†

1. $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(t_1)R_X(t_1 - t_0)g(t_0)\ dt_1 dt_0 \geq 0$ herhangi bir $g(t)$ için

(2. özellik *pozitif semi-definite* özelliği adını alır.)

$R_X(\tau)$ nin diğer özellikleri yukarıdakilerden çıkarılabilir:

$$R_X(0) = E\left[X^2(t)\right] \geq 0$$

$$\left|R_X(\tau)\right| \leq R_X(0)$$

---

† Otokovaryans fonksiyonu için de geçerlidir.

Kros-Korelasyon Fonksiyonu

$$R_{XY}(t_1,t_0)=E\left[X(t_1)Y(t_0)\right]$$

Eğer $X(t)$ ve $Y(t)$ nin her biri wss ise ve aşağıdaki koşulu sağlıyorsa $X(t)$ ve $Y(t)$ <u>ortak olarak wss</u> denir.

$$R_{XY}(t_1,t_0)=R_{XY}(t_1-t_0)=R_{XY}(\tau)$$

burada $\quad R_{XY}(t_1,t_0)=E\left[Y(t_0)X(t_1)\right]=R_{YX}(t_0,t_1)$

$\therefore$ eğer durağansa $\quad R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau)$

Örnek: (k*ros-korelasyonun kullanımı*)

$$X(t) = W(t) \quad \text{ya da } X(t) = A\cos\left(\omega t + \phi\right) + W(t)$$

$$Y(t) = A\cos\left(\omega t + \varphi\right), \quad \left(\varphi, \left[-\pi, \pi\right] \text{ aralığında düzgün dağılımlı}\right)$$

Durum (i): Let $X(t) = W(t)$, (sinyal yok)

Durum (ii):

$$R_{XY}(t_1, t_0) = E\left[X(t_1)Y(t_0)\right] = AE\left[W(t_1)\cos\left(\omega t_0 + \phi\right)\right]$$

$$= AE\left[W(t_1)\right]E\left[\cos\left(\omega t_0 + \phi\right)\right] = 0$$

$$R_{XY}(t_1, t_0) = E\left[X(t_1)Y(t_0)\right] = E\left[\left\{A\cos\left(\omega t_0 + \phi\right) + W(t_1)\right\}\left\{A\cos\left(\omega t_0 + \phi\right)\right\}\right]$$

$$= A^2E\left[\cos\left(\omega t_1 + \phi\right)\cos\left(\omega t_0 + \phi\right)\right] + AE\left[W(t_1)\cos\left(\omega t_0 + \phi\right)\right]$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos\omega\left(t_1 + t_0\right) = \frac{A^2}{2}\cos\omega\left(\tau\right)$$