Güç Spektral Yoğunluk (PSD) Fonksiyonu

- Otokorelasyon fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$S_X(f) = \mathcal{F}\left[R_X(\tau)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

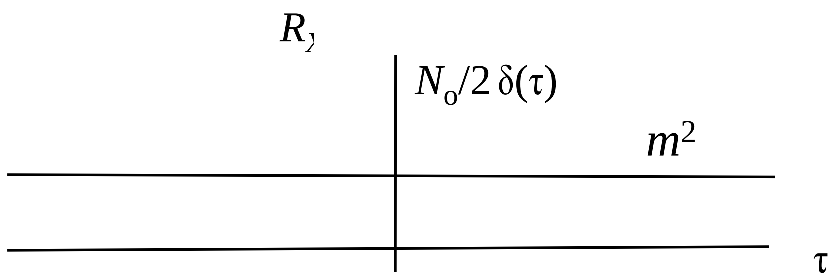
- Özellikler:
  - $R_X(0) = E\left[X^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, df$
  - $S_X(f)$ gerçek ve çift simetriktir: $S_X(f) = S_X(-f)$
  - $S_X(f) \geq 0$

<u>Örnek</u>:

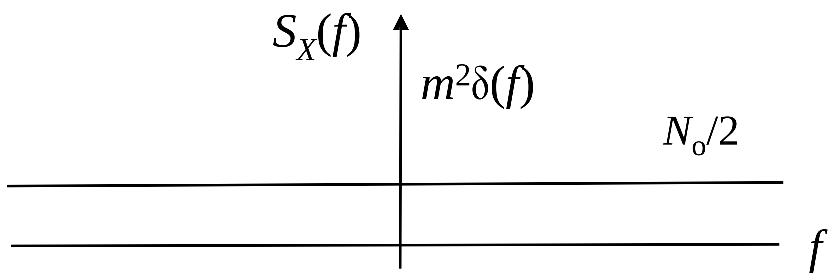
- Genel bir ilintisiz rastgele süreç için

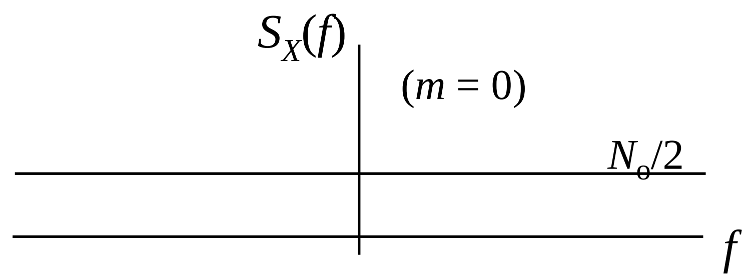
$$R_X(\tau) = R_X(\tau) + m^2 = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) + m^2$$

$$S_X(f) = \mathcal{F}\left[\frac{N_0}{2}\delta(\tau) + m^2\right] = \frac{N_0}{2} + m^2\delta(f)$$



beyaz gürültü





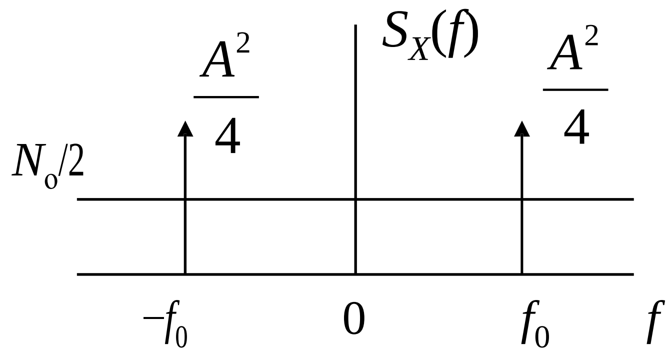
Example: $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) + W(t)$

$W(t)$ beyaz, $N_0/2$; φ birbiçim $[-\pi, \pi]$; W, φ bağımsız

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos 2\pi f_0 \tau + \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

$$S_X(f) = \mathcal{F}\left[R_X(\tau)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \frac{A^2}{2}\mathcal{F}\left[\cos 2\pi f_0 \tau\right] + \frac{N_0}{2}\mathcal{F}\left[\delta(\tau)\right] = \frac{A^2}{4}\delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f + f_0) + \frac{N_0}{2}$$



Kros-Güç Spektral Yoğunluk Fonksiyonu

$$S_{XY}(f) = \mathcal{F}\left[R_{XY}(\tau)\right]$$

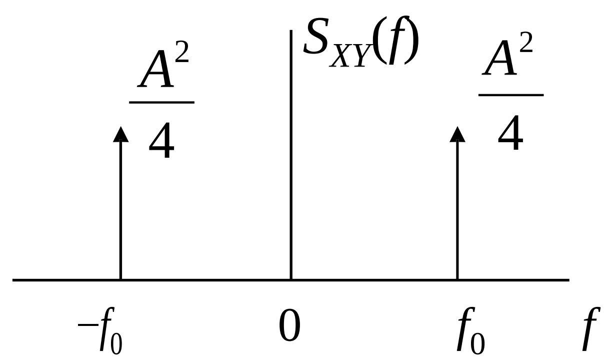
<u>Örnek</u>: $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) + W(t)$, $\quad Y(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

$W(t)$ beyaz, $N_0/2$; $\quad \varphi$ birbiçim $[-\pi, \pi]$; $\quad W, \varphi$ bağımsız

$$R_{XY}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos 2\pi f_0 \tau$$

$$S_{XY}(\omega) = \mathcal{F}\left[R_{XY}(\tau)\right] = \frac{A^2}{2}\mathcal{F}\left[\cos 2\pi f_0 \tau\right]$$

$$= \frac{A^2}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f + f_0)$$



Benzetim Örneği: $X(t) = 4\cos(10\pi t + 0.59) + W(t)$

Gürültü $W(t)$ beyaz, $m = 0$, $N_0/2 = 0.25$ watt/Hz

Faz $\varphi = 0.59$ radyan (tek gerçekleme)

Varsayım: φ birbiçim $[-\pi, \pi]$; W, φ bağımsız

$$SNR_{\text{dB}} = 10\log_{10}\left(\text{Sinyal Gücü} \;\;/\;\; \text{Gürültü Gücü}\right)$$

Dalgaşekli süresi: $0 \le t < 2$ sn

$T_S = 0.01$ sn örnekleme peryoduyla 200 örnek üretin:

Örnekleme frekansı: $f_S = 100$ Hz

$$\text{Gürültü Gücü} = 0.25 \text{ watt/Hz} \times 100 \text{ Hz} = 25 \text{ watt}$$

$$Sl \;\; SNR_{\text{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{4^2}{2}\Big/25\right) = -4.95 \text{ dB}$$

Benzetim Örneği (devam)

Korelasyonlar ve güç spektrumu:

MATLAB **xcorr** komutu 399 örnek üretir

Ortadaki 200 değerin fft sini alırsak:

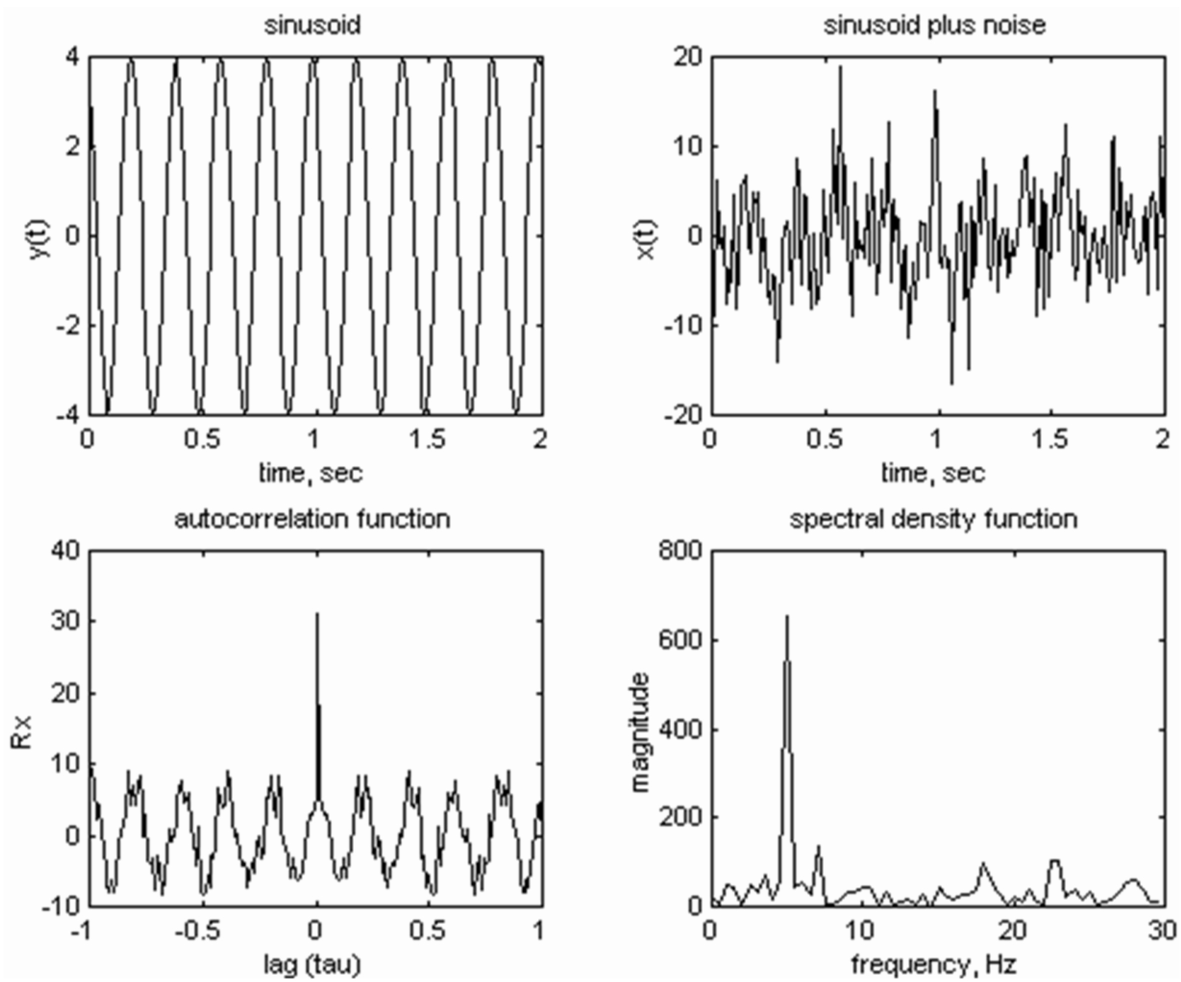
- 200 fft katsayısı (0 to 100 Hz i kapsayan)
- bin genişliği 100/200 = 0.5 Hz
- ilk 60 fft katsayısını çizdirin

Faz ϕ birbiçim

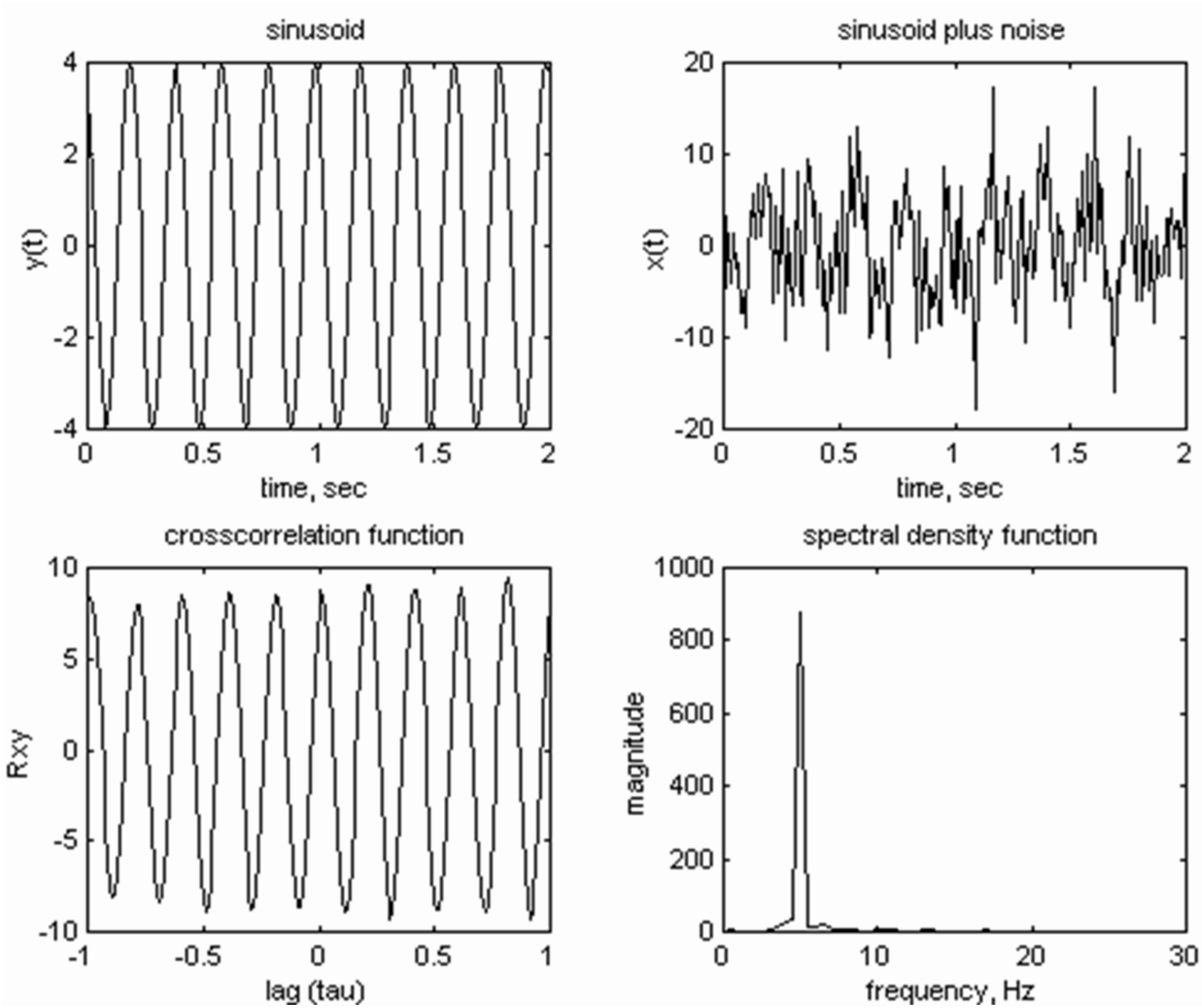
benzetimlerinizi ϕ: $[-\pi, \pi]$ arasındaki farklı değerler için koşturun.

Sonuçların ortalamasını alın.

Otokorelasyon ve Spektral Yoğunluk Fonksiyonu:



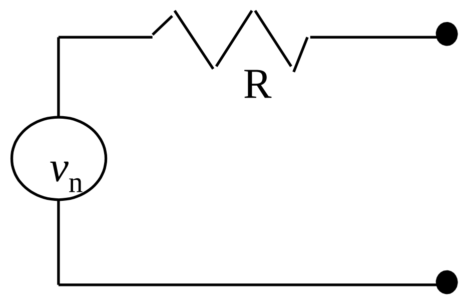
Kros-Korelasyon and Kros -Spektrum:



Termal Gürültü

- İdeal olmayan iletim ortamındaki serbest elektronların ısıdan kaynaklı harektelerinin rastgeleliğinden ortaya çıkar.
  - Serbest elektron hareketi dalgalanan voltajı arttırır.
  - Toplam gürültü voltajı çok büyük sayıda çok kısa süreli voltaj darbelerinin (bağımsız olarak üretilmiş) toplamı şeklinde verilir.
  - Merkezi limit teoreminden, toplam gürültü voltajı beyaz Gausyen süreç olur.

- Termal gürültü ideal bir direnç ve bir gürültü kaynağının kombinasyonu şeklinde temsil edilebilir:



- Eşdeğer gürültü üretecinin güç spektral yoğunluğu şu şekilde tanımlanır

$$S_W(f) = \frac{kT}{2} = \frac{N_0}{2} \text{ watt/Hz}$$

burada T °Kelvin cinsinden ortamın sıcaklığı ve
$k = 1.37 \times 10^{-23}$ Joule/ °Kelvin Boltzmann sabiti.

<u>Örnek</u>:

25 °C de 1 MΩ luk direnç üzerindeki termal gürültü kaynaklı güç spektrum yoğunluğu şu şekilde hesaplanır:

$$T = 25 + 273.16 = 298.16 \qquad (^\circ \text{ Kelvin})$$

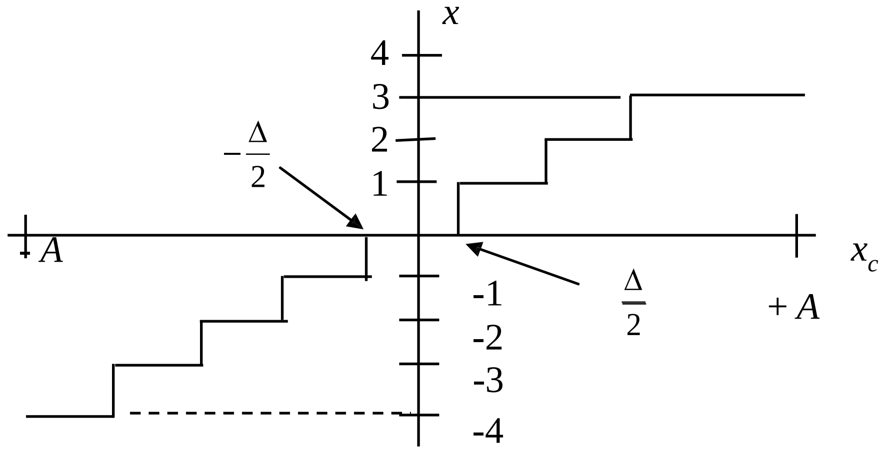
$$S_W(f) = \frac{kT}{2} = \frac{N_0}{2} = \frac{1.38\times10^{-23}\times298.16}{2} = 2.0573\times10^{-21} \text{ watt/Hz}$$

Eğer sistemin bant genişliği 10 MHz ise dirençten kaynaklanan toplam gürültü gücü 2.0573×10^{-14} watt tır.

Nicemleme Gürültüsü

- Nicemleme gürültüsü sürekli bir genlik kesikli hale getirildiğinde oluşur.
- Nicemleme yuvarlama veya kesme (truncation) ile elde edilir.
- Nicemleme adım büyüklüğü:

$$\Delta = 2A/N$$



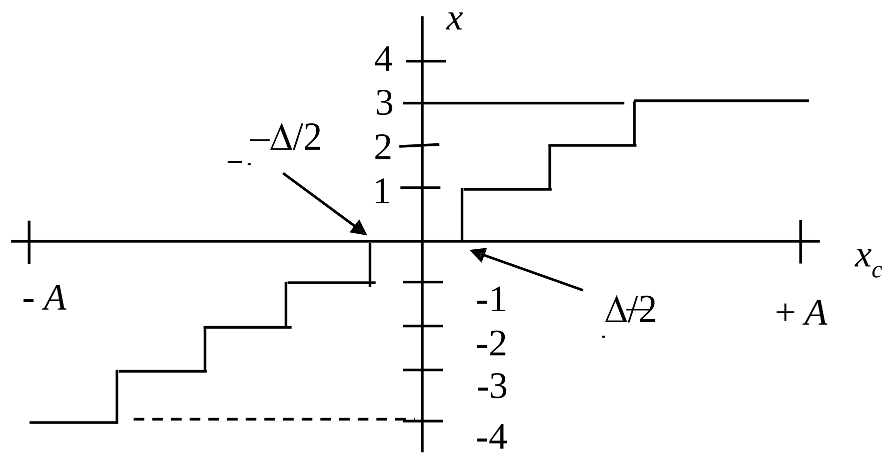
$N = 2^b$ nicemleme seviyelerinin sayısı olsun; b bit sayısıdır.

Nicemleme hatası: $e = x_c - x$, $\pm \Delta/2 = \pm A/N$ aralığında.

Yuvarlamadan dolayı, e birbiçim dağılmıştır: $[-\Delta/2, \Delta/2]$

$$f_E(e) = \frac{1}{\Delta}$$

$$-\frac{\Delta}{2} \leq e \leq \frac{\Delta}{2}$$



e nin ortalaması sıfırdır;
varyans: $\Delta^2/12 = 4A^2/12N^2$.

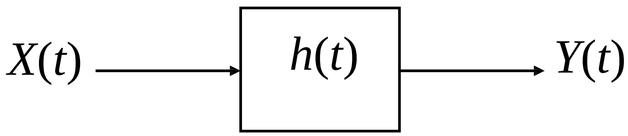
Sinusoidal giriş varsayımıyla, SNR şöyle hesaplanır:

$$SNR_{\text{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{\text{Sinyal gücü}}{\text{gürültü gücü}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{A^2/2}{4A^2/12N^2}\right)$$

$$= 10\log_{10}\left(1.5 \times 2^{2b}\right) = 1.7609 + 6.0206b \text{ dB}$$

Lineer Sistemlerin Rastgele Sinyallere Tepkesi

w.s.s. LTI System



$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u)du = h(t) * X(t)$$

<u>Sistem çıkışının ortalaması:</u>

$$E\left[Y(t)\right]=E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u)du\right]=\int_{-\infty}^{\infty} h(u)E\left[X(t-u)\right]du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(u)m_X du = m_X\int_{-\infty}^{\infty} h(u)du$$

$$\boxed{m_Y = m_X\int_{-\infty}^{\infty} h(u)du}$$

Kros-korelasyon fonksiyonu:

$$R_{YX}(\tau) = E\big[Y(t)X(t-\tau)\big] = E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u)du\right)X(t-\tau)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)E\big[X(t-u)X(t-\tau)\big]du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)R_X(\tau-u)du$$

$$R_{YX}(\tau) = h(\tau) * R_X(\tau)$$

Çıkışın otokorelasyon Fonksiyonu:

$$R_Y(\tau) = E\left[Y(t)Y(t-\tau)\right] = E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u)du\right)Y(t-\tau)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)E\left[X(t-u)Y(t-\tau)\right]du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)R_{XY}(\tau-u)du$$

buradan: $R_Y(\tau) = h(\tau) * R_{XY}(\tau)$

$$= h(\tau) * R_{YX}(-\tau) = h(\tau) * \left\{h(-\tau) * R_X(-\tau)\right\}$$

$$= h(\tau) * h(-\tau) * R_X(-\tau)$$

$$R_Y(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_X(\tau)$$

Frekans Bölgesi Analizi

$$R_X(\tau) \Leftrightarrow S_X(f) \qquad R_Y(\tau) \Leftrightarrow S_Y(f)$$

$$R_{XY}(\tau) \Leftrightarrow S_{XY}(f) \qquad R_{YX}(\tau) \Leftrightarrow S_{YX}(f)$$

$$h(\tau) \Leftrightarrow H(f) \qquad h(-\tau) \Leftrightarrow H^*(f)$$

Kros-spektral yoğunluk fonksiyonu:

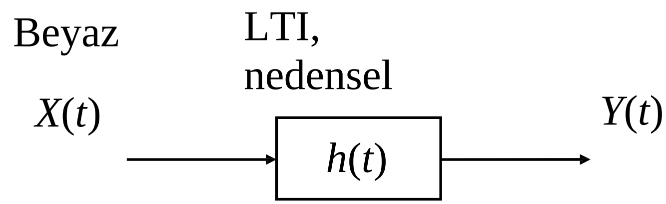
$$R_{YX}(\tau) = h(\tau) * R_X(\tau) \Leftrightarrow S_{YX}(f) = H(f) S_X(f)$$

Çıkış güç spektral yoğunluk fonksiyonu

$$R_Y(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_X(\tau) \Leftrightarrow \boxed{S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)}$$

Uygulama: Sistem Tanıma (Identification)

- Sistemin dürtü tepkisi $h(t)$ bilinmiyor.



- Sistem girişi beyaz gürültü olsun $R_X(\tau)=\delta(\tau)$; $S_X(f)=1$

- Sistem tepkesi girişle çıkışın kros korelasyonun hesaplanmasıyla tanımlanır.

Zaman (gecikme) bölgesi: $$R_{YX}(\tau)=h(\tau)*R_X(\tau)=h(\tau)*\delta(\tau)=h(\tau)$$

Frekans bölgesi: $$S_{YX}(f)=H(f)S_X(f)=H(f)\cdot 1=H(f)$$

Benzetim Örneği:

beyaz LTI, nedensel

$$X(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t)$$