Varsayımların Sınanması

İstatistiksel Deney Tasarımı

Birdal Şenoğlu
Şükrü Acıtaş

İçindekiler

ANOVA nın temel varsayımlarını yeniden hatırlayacak olursak;

1. **Varsayım** ε_{ij} hata terimleri, 0 ortalama ve σ^2 varyans ile normal dağılıma sahiptir,
2. **Varsayım** Hata terimlerinin varyansları homojendir,
3. **Varsayım** Hata terimleri birbirinden bağımsızdır.

Bu bölümde bu varsayımların sağlanıp sağlanmadığını sınamak için literatürde yaygın olarak kullanılan bazı yöntem ve testlerden bahsedilecektir.

- Q-Q grafiği, standart normal dağılımın teorik yüzdelikleri ile veri setinin (deneysel/empirik) yüzdeliklerini karşılaştıran grafiksel bir yöntemdir.
- Bu yöntemin nasıl uygulandığı aşağıda adımlar halinde açıklanmıştır.

1. Adım Veriler küçükten büyüğe doğru sıralanır:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}.$$

Burada $x_{(i)}$, $i-$inci sıra istatistiğini göstermektedir.

2. Adım Sıralanmış gözlemlerin beklenen değerleri $t_{(i)} = E(z_{(i)})$ olarak gösterilir ve

$$\int_{-\infty}^{t_{(i)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \frac{i - 0.5}{n}$$

eşitliğinin çözümünden elde edilir. Bir başka deyişle,

$$t_{(i)} = F^{-1}\left(\frac{i - 0.5}{n}\right)$$

dir; burada $F(\cdot)$, standart normal dağılımın dağılım fonksiyonudur. Bazı kaynaklarda gösterildiği gibi, $\frac{i - 0.5}{n}$ yerine $\frac{i}{n+1}$ değerleri de kullanılabilir.

3. Adım Sıralanmış gözlemler $x_{(i)}$ lere karşılık gelen $t_{(i)}$ değerlerinin grafiği çizilir. $t_{(i)}$ değerleri, standart normal dağılımın yüzdelikleri olarak da ifade edilir.

4. Adım $(x_{(i)}, t_{(i)})$ grafiğindeki noktalar, düz bir doğru etrafında yayılım gösteriyorsa

"*Veri seti normal dağılıma sahiptir*"

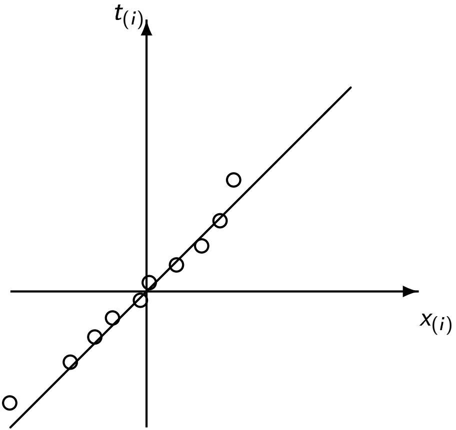
denir.

Örnek

Aşağıdaki veri setinin normal dağılıma sahip olup olmadığını Q-Q grafik yöntemini kullanarak belirleyiniz.

x_i :	0.44	1.28	-0.50	-1.12	0.81
	0.04	-0.76	-0.09	-2.01	1.08

$x_{(i)}$	$p_{(i)}$	$t_{(i)}$
-2.01	0.05	-1.64
-1.12	0.15	-1.04
-0.76	0.25	-0.67
-0.50	0.35	-0.39
-0.09	0.45	-0.13
0.04	0.55	0.13
0.44	0.65	0.39
0.81	0.75	0.67
1.08	0.85	1.04
1.28	0.95	1.64

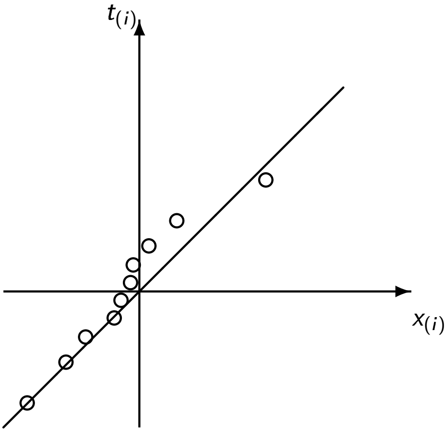

$t_{(i)}$
$x_{(i)}$

Örnek

Aşağıdaki veri setinin normal dağılıma sahip olup olmadığını Q-Q grafik yöntemini kullanarak belirleyiniz.

x_i :	-1.08	0.14	-0.27	-0.09	-0.37
	-1.65	-0.13	1.86	0.55	-0.79

$x_{(i)}$	$p_{(i)}$	$t_{(i)}$
-1.65	0.05	-1.64
-1.08	0.15	-1.04
-0.79	0.25	-0.67
-0.37	0.35	-0.39
-0.27	0.45	-0.13
-0.13	0.55	0.13
-0.09	0.65	0.39
0.14	0.75	0.67
0.55	0.85	1.04
1.86	0.95	1.64


$t_{(i)}$
$x_{(i)}$

- Shapiro-Wilk testi 1965 yılında Samuel Shapiro ve Martin Wilk tarafından önerilmiştir. Normalliği test etmek için kullanılan en güçlü omnibus testlerden biridir.
- Shapiro-Wilk testinde sıfır hipotezi

$$H_0 : \text{Veri seti normal dağılıma sahiptir}$$

şeklinde kurulur.

- H_0 : hipotezi,

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} \tag{1}$$

test istatistiği kullanılarak sınanır.

Burada,

- $$y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \cdots \leq y_{(n)}$$

  sıralı gözlemleri
- $\bar{y}$ de gözlemlerin aritmetik ortalamasını

gösterir.

- a_i katsayıları, Shapiro & Wilk (1965) tarafından tablolaştırılmıştır.
- Ayrıca,

  $$a_{n-i+1} = -a_i$$

  olduğundan, hesaplama kolaylığı sağlaması bakımından

  $$\sum_{i=1}^{n} a_i y_{(i)}$$

  ifadesi yerine

  $$\sum_{i=1}^{k} a_{n-i+1}(y_{(n-i+1)} - y_{(i)})$$

  ifadesi de kullanılabilir.
- Burada n çift sayı ise $k = n/2$ ve n tek sayı ise $k = (n-1)/2$ olarak alınır.
- Açıktır ki, bu iki ifade birbirine denktir, dolayısıyla aynı sonucu verirler.

Karar

W test istatistiğinin değeri, α anlam düzeyinde, $W_{\alpha,n}$ tablo değerinden daha küçükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$W < W_{\alpha,n}$$

ise "*Veri seti normal dağılıma sahip değildir*" denir. Burada $W_{\alpha,n}$ değeri, Shapiro-Wilk testinin kritik değeridir ve Shapiro-Wilk (1965) tarafından tablolaştırılmıştır. ♣

- Bartlett testi (Bartlett, 1937; Snedecor & Cochran, 1989) bağımsız normal dağılımlı kitlelerden geldiği varsayılan rasgele örneklemlerin varyanslarının homojenliğini sınamak için kullanılır.
- Bir başka ifade ile normallik varsayımına karşı oldukça duyarlı bir testtir. Normallik varsayımı sağlanmadığında Bartlett testinin gücü azalır.

- a tane bağımsız örneklem için varyansların homojenliğine ilişkin sıfır hipotezi

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_a^2 \tag{2}$$

olarak ifade edilir.

- H_0 hipotezini sınamak için kullanılan test istatistiği

$$\chi_B^2 = 2.3026 \frac{V}{D} \tag{3}$$

olarak tanımlanır.

Burada,

$$
\begin{aligned}
V &= (N-a)\ln S_p^2 - \sum_{i=1}^{a}(n_i-1)\ln S_i^2 \\
D &= 1 + \frac{1}{3(a-1)}\left(\sum_{i=1}^{a}\frac{1}{(n_i-1)} - \frac{1}{(N-a)}\right) \\
S_p^2 &= \frac{1}{N-a}\sum_{i=1}^{a}(n_i-1)S_j^2 \\
S_i^2 &= \frac{1}{n_i-1}\sum_{i=1}^{n_i}(y_i-\bar{y})^2
\end{aligned}
$$

dir.

Karar

χ^2_B test istatistiğinin değeri, α anlam düzeyinde, $a-1$ serbestlik dereceli χ^2 tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$\chi^2_B > \chi^2_{\alpha;a-1}$$

ise "*Varyanslar homojen değildir*" denir. ♣