İç-İçe Tasarımlar

İstatistiksel Deney Tasarımı

Birdal Şenoğlu
Şükrü Acıtaş

İçindekiler

Giriş

Aşamalı tasarımlar (hierarchical designs) olarak da bilinen **iç-içe tasarımlarda** (nested designs), şu ana kadar gördüğümüz tasarımlardan farklı olarak iki veya ikiden fazla "faktör" vardır.

Giriş

- Etkisi araştırılmak istenen A ve B gibi iki tane faktörümüz olduğunu varsayalım.
- A faktörünün a, B faktörünün b düzeyi olsun.
- B faktörünün b düzeyi, A faktörünün a düzeyinin her birinin içinde yuvalanmışsa, bu tip tasarımlara **iki aşamalı iç-içe tasarım** (two-stage nested design) denir.
- Bu durum, B faktörü, A faktörünün içinde yuvalanmıştır şeklinde ifade edilir ve B(A) sembolü ile gösterilir.

Giriş

- Sırasıyla a, b ve c düzeye sahip olan A, B ve C gibi üç faktörümüz olduğunda, C faktörünün c düzeyi, B faktörünün b düzeyinin her birinin içinde, B faktörünün b düzeyi de A faktörünün a düzeyinin her birinin içinde yuvalanmış ise bu tip tasarımlara da **üç aşamalı iç-içe tasarım** (three-stage nested design) denir.
- Bu durum, C faktörü, B faktörünün içinde ve B faktörü de, A faktörünün içinde yuvalanmıştır şeklinde ifade edilir ve sırasıyla C(B) ve B(A) sembolleriyle ifade edilir.
- Açıktır ki, birbirlerinin içinde yuvalanmış ℓ tane faktörümüz varsa, bu tasarımlara da ℓ **aşamalı iç-içe tasarım** (ℓ-stage nested design) denir.

Giriş

- 2-aşamalı iç-içe tasarımlarda, araştırmadaki önemine göre dıştaki faktör **ana faktör** (major factor), içteki faktör ise **ikincil faktör** (minor factor) olarak isimlendirilir, bkz. Berger & Maurer (2002). 3-aşamalı ve ℓ-aşamalı iç-içe tasarımlarda da benzer tanımlamalar yapılabilir.
- Yuvalanmış faktörün düzey sayısı, dıştaki faktörün her bir düzeyinde aynı ise ve her bir faktör kombinasyonundaki tekrar sayısı n ise, iç-içe tasarımlara, **dengeli iç-içe tasarımlar** (balanced nested designs) adı verilir.

Giriş

Burada dikkat edilmesi gereken husus, yuvalanmış faktörün düzeyleri sadece yuvalandığı düzeye aittir. Bir başka deyişle, içteki faktörün düzeyleri dıştaki faktörün her bir düzeyinde benzerdir ama aynı/özdeş değildir, Montgomery (2001). Dolayısıyla, faktörler arasında etkileşim yoktur.

Giriş: Örnek

Örnek

Aşağıda detayları verilen ders anlatma tekniklerinin

T1	:	*Ders materyalini tepegöz kullanarak anlatmak,*
T2	:	*Ders materyalini tahtaya yazarak anlatmak,*
T3	:	*Ders materyalinin fotokopisini her dersin başında öğrencilere dağıtmak ve dersi fotokopiler üzerinden anlatmak*
T4	:	*Ders materyalini, her dersten bir hafta önce internete koymak ve dersi soru, cevap ağırlıklı bir tartışma ortamı yaratarak anlatmak.*

ve bu teknikleri kullanarak ders anlatan öğretim görevlilerinin dönem sonu sınıf başarı ortalamasına olan etkileri araştırılmak isteniyor.
Bu amaçla, Ankara Üniversitesinde, birinci sınıf öğrencilerine açılan ve kırk şubeden oluşan İngilizce dersi her bir tekniği iki ayrı öğretim görevlisi kullanacak şekilde sekize bölünüyor. Her bir öğretim görevlisi beşer tane şubeye ders anlatıyor. $\diamondsuit$

Giriş: Örnek

- Bu örnekte, toplam 8 tane öğretim görevlisi vardır ve her bir öğretim görevlisi sadece ilgili teknik konusunda tecrübelidir.
- Dolayısıyla, öğretim görevlisi faktörü sabit etkilidir. Benzer şekilde, tekniklerin de sabit etkili olduğu açıktır.
- Bu durumda kullanılabilecek en uygun tasarım, iç-içe tasarımdır. Çünkü burada "Ders anlatma teknikleri" ve "Öğretim Görevlileri" olmak üzere iki ayrı faktör vardır.
- "Öğretim Görevlileri" faktörünün iki düzeyi vardır ve bu düzeyler sadece öğretim görevlilerinin kullandıkları ders anlatma tekniğinin ilgili düzeyine aittir.
- Örneğin, T1 tekniğini kullanan öğretim görevlileri sadece T1 tekniğinde mevcuttur, T2, T3 ve T4 tekniklerini kullanan öğretim görevlileri farklı kişilerdir.

Matematiksel Model

A ve B gibi iki faktörün olduğu, iki aşamalı iç-içe tasarım için matematiksel model,

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}, \qquad (1)$$

$$i = 1, 2, \cdots a; \quad j = 1, 2, \cdots, b; \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

y_{ijk},	A faktörünün $i-$inci düzeyinde yuvalanmış B faktörünün $j-$inci düzeyindeki $k-$ıncı gözlem değerini,
μ,	genel ortalamayı,
τ_i,	A faktörünün $i-$inci düzeyinin etkisini,
$\gamma_{j(i)}$,	A faktörünün $i-$inci düzeyinde yuvalanmış B faktörünün $j-$inci düzeyinin etkisini ve
ε_{ijk},	rasgele hata terimlerini

gösterir.

Matematiksel Model

(1) modeli sabit etkili bir modeldir. Bir başka deyişle

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{b} \gamma_{j(i)} = 0 \tag{2}$$

olduğu varsayılır.

Veri Yapısı

(1) modelinde $a = 3$ ve $b = 2$ iken veri yapısı aşağıdaki gibidir:

A Faktörü					
A1		A2		A3	
B Faktörü					
B1	B2	B1	B2	B1	B2
y_{111}	y_{121}	y_{211}	y_{221}	y_{311}	y_{321}
y_{112}	y_{122}	y_{212}	y_{222}	y_{312}	y_{322}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_{11n}	y_{12n}	y_{21n}	y_{22n}	y_{31n}	y_{32n}

Burada, $A1$, $A2$ ve $A3$, A faktörünün; $B1$ ve $B2$ de B faktörünün düzeylerini göstermektedir.

Parametre Tahmini

(1) modelinde parametrelerin LS tahmin edicileri,

$$\tilde{\mu} = \bar{y}_{\cdots} \tag{3}$$
$$\tilde{\tau}_i = \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdots} \tag{4}$$
$$\tilde{\gamma}_{j(i)} = \bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} \tag{5}$$

olarak bulunur.

Parametre Tahmini

Burada,

$$\bar{y}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{bn} \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, a;$$
$$\bar{y}_{ij.} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{n} \quad , \quad j = 1, 2, \cdots, b \tag{6}$$

ve $N = abn$ olmak üzere, tüm gözlemlerin ortalaması,

$$\bar{y}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{N} \tag{7}$$

dir.

Parametre Tahmini

Hatanın varyansı σ^2 nin (yan düzeltmesi yapılmış) LS tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \tilde{\mu} - \tilde{\tau}_i - \tilde{\gamma}_{j(i)})^2}{ab(n-1)} \tag{8}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2}{N - ab} \tag{9}$$

dir.

Hipotez Testi

(1) modelinde, A ve B faktörlerinin düzeyleri arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığı sınanır. Her bir durum için hipotezler, sırasıyla

$$H_{01} : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0 \tag{10}$$

ve

$$H_{02} : \gamma_{1(1)} = \gamma_{1(2)} = \cdots = \gamma_{b(a)} = 0 \tag{11}$$

dir.

Hipotez Testi: Genel Kareler Toplamının Parçalanışı

(1) modelinde genel kareler toplamı

$$SS_{Toplam} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 \tag{12}$$

olarak tanımlanır ve

$$SS_{Toplam} = SS_A + SS_{B(A)} + SS_{Hata} \tag{13}$$

şeklinde bileşenlerine ayrılır.

Hipotez Testi: Genel Kareler Toplamının Parçalanışı

Burada,

$$\begin{aligned}
SS_A &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 = bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 \\
SS_{B(A)} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..})^2 = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..})^2 \qquad (14) \\
SS_{Hata} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2
\end{aligned}$$

dir.

Hipotez Testi: Test İstatistikleri

(1) modelinde, (10) hipotezini sınamak için

$$F_A = \frac{SS_A \Big/ (a-1)}{SS_{Hata} \Big/ (N-ab)} = \frac{MS_A}{MS_{Hata}} \tag{15}$$

ve (11) hipotezini sınamak için

$$F_{B(A)} = \frac{SS_{B(A)} \Big/ a(b-1)}{SS_{Hata} \Big/ (N-ab)} = \frac{MS_{B(A)}}{MS_{Hata}} \tag{16}$$

test istatistikleri kullanılır.

Hipotez Testi: Test İstatistikleri

Teorem

(1) *modelinde, H_0 hipotezi altında,*

(i) F_A *test istatistiği,* $a-1$ *ve* $N-ab$ *serbestlik dereceli merkezi* $\boldsymbol{F}$ *dağılımına sahiptir.*

(ii) $F_{B(A)}$ *test istatistiği,* $a(b-1)$ *ve* $N-ab$ *serbestlik dereceli merkezi* $\boldsymbol{F}$ *dağılımına sahiptir.*

Hipotez Testi: KARAR

- F_A test istatistiğinin değeri, α anlam düzeyinde, $a-1$ ve $N-ab$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

  $$F_A > \boldsymbol{F}_{\alpha;a-1;N-ab}$$

  ise "*A faktörünün düzeyleri arasında anlamlı bir farklılık vardır*" denir.

- $F_{B(A)}$ test istatistiğinin değeri α anlam düzeyinde, $a(b-1)$ ve $N-ab$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

  $$F_{B(A)} > \boldsymbol{F}_{\alpha;a(b-1);N-ab}$$

  ise "*B faktörünün düzeyleri arasında anlamlı bir farklılık vardır*" denir. ♣

ANOVA TAblosu

Yukarıda elde edilen bilgiler ışığında, iki aşamalı iç-içe tasarım için ANOVA tablosu, aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

Kaynak	df	SS	MS	F
A	$a-1$	SS_A	MS_A	F_A
B(A)	$a(b-1)$	$SS_{B(A)}$	$MS_{B(A)}$	$F_{B(A)}$
Hata	$N-ab$	SS_{Hata}	MS_{Hata}	
Genel	$N-1$	SS_{Toplam}		

Matematiksel Model

A , B ve C gibi üç faktörün olduğu, üç aşamalı iç-içe tasarım için matematiksel model,

$$y_{ijk\ell} = \mu + \tau_i + \gamma_{j(i)} + \delta_{k(ij)} + \varepsilon_{ijk\ell}, \qquad (17)$$

$$i = 1, 2, \cdots a; \quad j = 1, 2, \cdots, b; \quad k = 1, 2, \cdots, c; \quad \ell = 1, 2, \cdots, n$$

şeklinde ifade edilir.

- Burada $\delta_{k(ij)}$ parametresi, A faktörünün $i-$inci, B faktörünün $j-$inci düzeyinde yuvalanmış C faktörünün $k-$ıncı düzeyinin etkisini gösteren model parametresidir.
- Diğer parametrelerin yorumu, 7.2 bölümünde olduğu gibidir.

Matematiksel Model

(17) modeli sabit etkili bir modeldir. Bir başka deyişle

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{b} \gamma_{j(i)} = 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{c} \delta_{k(ij)} = 0 \tag{18}$$

olduğu varsayılır.

Parametre Tahmini

(17) modelinde, parametrelerin LS tahmin edicileri,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mu} &= \bar{y}_{....} && (19)\\
\tilde{\tau}_i &= \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{....} && (20)\\
\tilde{\gamma}_{j(i)} &= \bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i...} && (21)\\
\tilde{\delta}_{k(ij)} &= \bar{y}_{ijk.} - \bar{y}_{ij..} && (22)\\
& && (23)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Parametre Tahmini

Burada,

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{i\cdots} &= \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n} y_{ijk\ell}}{bcn} \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, a; \\
\bar{y}_{ij\cdot\cdot} &= \frac{\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n} y_{ijk\ell}}{cn} \quad , \quad j = 1, 2, \cdots, b; \\
\bar{y}_{ijk\cdot} &= \frac{\sum_{\ell=1}^{n} y_{ijk\ell}}{n} \quad , \quad k = 1, 2, \cdots, c
\end{aligned} \tag{24}$$

ve $N = abcn$ olmak üzere, tüm gözlemlerin ortalaması,

$$\bar{y}_{\cdots\cdot} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n} y_{ijk\ell}}{N} \tag{25}$$

dir.

Parametre Tahmini

Hatanın varyansı σ^2 nin (yan düzeltmesi yapılmış) LS tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n}(y_{ijk\ell} - \tilde{\mu} - \tilde{\tau}_i - \tilde{\gamma}_{j(i)} - \tilde{\delta}_{k(ij)})^2}{N - abc} \tag{26}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n}(y_{ijk\ell} - \bar{y}_{ijk\cdot})^2}{N - abc} \tag{27}$$

dir.

Hipotez Testi

(17) modelinde, A, B ve C faktörlerinin düzeyleri arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığı sınanır. Her bir durum için hipotezler, sırasıyla

$$H_{01} : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0 \tag{28}$$

$$H_{02} : \gamma_{1(1)} = \gamma_{1(2)} = \cdots = \gamma_{b(a)} = 0 \tag{29}$$

ve

$$H_{03} : \delta_{1(1)} = \delta_{1(2)} = \cdots = \delta_{c(b)} = 0 \tag{30}$$

dır.

Hipotez Testi: Genel Kareler Toplamının Parçalanışı

(17) modelinde genel kareler toplamı

$$SS_{Toplam} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n}(y_{ijk\ell} - \bar{y}_{....})^2 \tag{31}$$

olarak tanımlanır ve

$$SS_{Toplam} = SS_A + SS_{B(A)} + SS_{C(B)} + SS_{Hata} \tag{32}$$

şekline bileşenlerine ayrılır.

Hipotez Testi: Genel Kareler Toplamının Parçalanışı

Burada,

$$\begin{aligned}
SS_A &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n}(\bar{y}_{i\ldots}-\bar{y}_{\ldots.})^2 = bcn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\ldots}-\bar{y}_{\ldots.})^2,\\
SS_{B(A)} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n}(\bar{y}_{ij..}-\bar{y}_{i\ldots})^2 = cn\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij..}-\bar{y}_{i\ldots})^2,\\
SS_{C(B)} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n}(\bar{y}_{ijk.}-\bar{y}_{ij..})^2 = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\bar{y}_{ijk.}-\bar{y}_{ij..})^2,\\
SS_{Hata} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n}(y_{ijk\ell}-\bar{y}_{ijk.})^2
\end{aligned} \tag{33}$$

dir.

Hipotez Testi: Test İstatistikleri

(17) modelinde, (28) hipotezini sınamak için

$$F_A = \frac{SS_A \Big/ (a-1)}{SS_{Hata} \Big/ (N-abc)} = \frac{MS_A}{MS_{Hata}}, \tag{34}$$

(29) hipotezini sınamak için

$$F_{B(A)} = \frac{SS_{B(A)} \Big/ a(b-1)}{SS_{Hata} \Big/ (N-abc)} = \frac{MS_{B(A)}}{MS_{Hata}} \tag{35}$$

ve (30) hipotezini sınamak için

$$F_{C(B)} = \frac{SS_{C(B)} \Big/ ab(c-1)}{SS_{Hata} \Big/ (N-abc)} = \frac{MS_{C(B)}}{MS_{Hata}} \tag{36}$$

test istatistikleri kullanılır.

Hipotez Testi: Test İstatistikleri

Teorem

(17) *modelinde,* H_0 *hipotezi altında,*

(i) F_A *test istatistiği,* $a-1$ *ve* $N-abc$ *serbestlik dereceli merkezi* ***F*** *dağılımına sahiptir.*

(ii) $F_{B(A)}$ *test istatistiği,* $a(b-1)$ *ve* $N-abc$ *serbestlik dereceli merkezi* ***F*** *dağılımına sahiptir.*

(iii) $F_{C(B)}$ *test istatistiği,* $ab(c-1)$ *ve* $N-abc$ *serbestlik dereceli merkezi* ***F*** *dağılımına sahiptir.*

Hipotez Testi: KARAR

- F_A test istatistiğinin değeri, α anlam düzeyinde, $a-1$ ve $N-abc$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$F_A > \boldsymbol{F}_{\alpha;a-1;N-abc}$$

ise "*A faktörünün düzeyleri arasında anlamlı bir farklılık vardır*" denir.

- $F_{B(A)}$ test istatistiğinin değeri, α anlam düzeyinde, $a(b-1)$ ve $N-abc$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$F_{B(A)} > \boldsymbol{F}_{\alpha;a(b-1);N-abc}$$

ise "*B faktörünün düzeyleri arasında anlamlı bir farklılık vardır*" denir.

- $F_{C(B)}$ test istatistiğinin değeri, α anlam düzeyinde, $ab(c-1)$ ve $N-abc$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$F_{C(B)} > \boldsymbol{F}_{\alpha;ab(c-1);N-abc}$$

ise "*C faktörünün düzeyleri arasında anlamlı bir farklılık vardır*" denir. ♣

ANOVA TAblosu

Yukarıda elde edilen bilgiler ışığında, üç aşamalı iç-içe tasarım için ANOVA tablosu, aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

Kaynak	df	SS	MS	F
A	$a-1$	SS_A	MS_A	F_A
B(A)	$a(b-1)$	$SS_{B(A)}$	$MS_{B(A)}$	$F_{B(A)}$
C(B)	$ab(c-1)$	$SS_{C(B)}$	$MS_{C(B)}$	$F_{C(B)}$
Hata	$N-abc$	SS_{Hata}	MS_{Hata}	
Genel	$N-1$	SS_{Toplam}		

Matematiksel Model

ℓ aşamalı iç-içe tasarım için matematiksel model,

$$y_{ij\cdots k\ell p} = \mu + \tau_i + \gamma_{j(i)} + \cdots + \delta_{\ell(ij\cdots k)} + \varepsilon_{ij\cdots k\ell p}, \tag{37}$$
$$i = 1,2,\cdots,a; j = 1,2\cdots,b; \ldots; k = 1,2,\cdots,t;$$
$$\ell = 1,2,\cdots,u, p = 1,2,\cdots,n$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki $\delta_{\ell(ij\cdots k)}$ terimi, A faktörünün $i-$inci, B faktörünün $j-$inci, ..., düzeyinde yuvalanmış U faktörünün $\ell-$inci düzeyini gösteren model parametresidir.

Parametre Tahmini

İki aşamalı ve üç aşamalı iç-içe tasarımlarda olduğu gibi ℓ aşamalı tasarımda da model parametreleri LS yöntemi kullanılarak bulunur. Model parametrelerinin LS tahmin edicileri

$$\tilde{\mu} = \bar{y}_{.......} \tag{38}$$

$$\tilde{\tau}_i = \bar{y}_{i.......} - \bar{y}_{.......} \tag{39}$$

$$\tilde{\gamma}_{j(i)} = \bar{y}_{ij......} - \bar{y}_{i.......} \tag{40}$$

$$\vdots = \vdots \tag{41}$$

$$\tilde{\delta}_{\ell(ij\cdots k)} = \bar{y}_{ij\cdots k\ell.} - \bar{y}_{ij\cdots k..} \tag{42}$$

olur.

Parametre Tahmini

Hatanın varyansı σ^2 nin (yan düzeltmesi yapılmış) LS tahmin edicisi

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\cdots\sum_{\ell=1}^{u}\sum_{p=1}^{n}(y_{ijk\cdots\ell} - \bar{y}_{ij\cdots k\ell\cdot})^2}{N - ab\cdots tu} \tag{43}$$

dir.

Hipotez Testi

ℓ aşamalı iç-içe tasarımda, modeldeki faktörlerin düzeyleri arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığı sınanır. Genel kareler toplamının bileşenlerine ayrılmasıyla bu hipotezleri sınamak için gereken test istatistikleri elde edilir.

Genel kareler toplamı,

$$SS_{Toplam} = SS_A + SS_{B(A)} + \cdots + SS_{U(T)} + SS_{Hata} \tag{44}$$

şeklinde bileşenlerine ayrılır.

Hipotez Testi

Burada,

$$
\begin{aligned}
SS_A &= b\cdots un\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\ldots\ldots}-\bar{y}_{\ldots\ldots\ldots})^2 && (45)\\
SS_{B(A)} &= c\cdots un\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij\ldots\ldots}-\bar{y}_{i\ldots\ldots})^2 && (46)\\
\vdots\quad & \vdots\quad \vdots && \\
SS_{U(T)} &= n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\cdots\sum_{\ell=1}^{u}(\bar{y}_{ij\cdots k\ell\cdot}-\bar{y}_{ij\cdots k\cdot\cdot}) && (47)\\
SS_{Hata} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\cdots\sum_{k=1}^{t}\sum_{\ell=1}^{u}\sum_{p=1}^{n}(y_{ijk\cdots\ell p}-\bar{y}_{ij\cdots k\ell\cdot})^2 && (48)
\end{aligned}
$$

dir.

Hipotez Testi

Kareler toplamlarının ilgili serbestlik derecesine bölünmesiyle, (37) modelindeki her bir faktör ve hata için kareler ortalamaları

$$\begin{aligned} MS_A &= \frac{SS_A}{a-1}, & MS_{B(A)} &= \frac{SS_{B(A)}}{a(b-1)}, \\ &\vdots & &\vdots \\ MS_{U(T)} &= \frac{SS_{U(T)}}{ab\cdots t(u-1)}, & MS_{Hata} &= \frac{SS_{Hata}}{N-ab\cdots tu} \end{aligned} \tag{49}$$

elde edilir.

Hipotez Testi

(37) modelinde yer alan faktörlerin anlamlılığını sınamak için

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_{Hata}} \tag{50}$$

$$F_{B(A)} = \frac{MS_{B(A)}}{MS_{Hata}} \tag{51}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$F_{U(T)} = \frac{MS_{U(T)}}{MS_{Hata}} \tag{52}$$

test istatistikleri kullanılır.

- Eğer hesaplanan F değerleri, ilgili serbestlik dereceleri ile $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezleri reddedilir.

Beklenen Kareler Ortalaması

(17) modelinde, A, B(A) ve C(B) faktörleri ve hata için beklenen kareler ortalamaları,

$$E(MSE_A) = \sigma^2 + \frac{bcn\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1} \tag{53}$$

$$E(MSE_{B(A)}) = \sigma^2 + \frac{cn\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\gamma_{j(i)}^2}{a(b-1)} \tag{54}$$

$$E(MSE_{C(B)}) = \sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\delta_{k(ij)}^2}{ab(c-1)} \tag{55}$$

$$E(MSE_{Hata}) = \sigma^2 \tag{56}$$

olarak elde edilir.

Beklenen Kareler Ortalaması

(53)-(55) denklemlerinden görüldüğü gibi, sıfır hipotezinin doğru olması halinde MSE_A, $MSE_{B(A)}$ ve $MSE_{C(B)}$ ifadeleri σ^2 nin yansız bir tahmin edicisidir. MSE_{Hata}, her zaman olduğu gibi, H_0 doğru olsun ya da olmasın, σ^2 nin yansız bir tahmin edicisidir.