Faktöriyel Tasarımlar

İstatistiksel Deney Tasarımı

Birdal Şenoğlu
&
Şükrü Acıtaş

Giriş

- Fisher (1935) ve Yates (1937) tarafından önerilen **Faktöriyel deneyler** (factorial experiments) veya bir çok kaynakta belirtildiği gibi **faktöriyel tasarımlar** (factorial designs), iki ya da ikiden fazla faktörün **ana etkilerini** (main effects) ve **etkileşim etkilerini** (interaction) aynı anda araştırmak için kullanılan oldukça popüler tasarımlardır.
- Özellikle mühendislik alanında yaygın bir kullanıma sahiptirler.
- Faktöriyel tasarımlar, zaman ve para tasarrufu sağlamak bakımından, her seferinde bir tane faktörün etkisini araştıran geleneksel tasarımlara göre çok daha etkindirler.
- Bunun yanı sıra, faktörler arasındaki etkileşim veya etkileşimleri araştırmak bakımından da her seferinde bir tane faktörün etkisini araştıran tasarımlara göre avantaj sağlarlar.
- Faktöriyel tasarımları, iç-içe tasarımlardan ayıran en önemli unsur, deneyde kullanılan herhangi bir faktörün düzeylerinin tamamının diğer faktör ya da faktörlerin her bir düzeyinde aynı/özdeş olmasıdır. Faktörler arasındaki etkileşimin temel nedeni de budur.

"Faktöriyel tasarımları", uygulamada yaygın olarak kullanılan $2^k, 3^k, \ldots$ gibi bazı özel faktöriyel tasarımlarla karıştırmamak için "genel faktöriyel tasarımlar" olarak adlandıracağız. Faktöriyel tasarımların özel hallerinden ise ayrıca bahsedeceğiz.

- Faktöriyel tasarımlarda, denemeler, faktör kombinasyonlarını ifade eder. Örneğin, A ve B faktörleri sırasıyla 3 ve 4 düzeye sahip olsun ve bu düzeyler, (a_1, a_2, a_3) ve (b_1, b_2, b_3, b_4) sembolleriyle gösterilsin. Bu deneyde,

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1, & a_1b_2, & a_1b_3, & a_1b_4, \\ a_2b_1, & a_2b_2, & a_2b_3, & a_2b_4, \\ a_3b_1, & a_3b_2, & a_3b_3, & a_3b_4 \end{array}$$

  olarak ifade edilen toplam $3 \times 4 = 12$ tane deneme vardır.
- Bu tasarım, 3×4 faktöriyel tasarım olarak adlandırılır.

- Benzer şekilde, A, B ve C faktörleri sırasıyla 3, 2 ve 3 düzeye sahip olsun ve bu düzeyler, (a_1, a_2, a_3) ve (b_1, b_2) ve (c_1, c_2, c_3) sembolleriyle gösterilsin. Bu deneyde,

$$\begin{array}{cccccc} a_1b_1c_1, & a_1b_1c_2, & a_1b_1c_3, & a_1b_2c_1, & a_1b_2c_2, & a_1b_2c_3, \\ a_2b_1c_1, & a_2b_1c_2, & a_2b_1c_3, & a_2b_2c_1, & a_2b_2c_2, & a_2b_2c_3, \\ a_3b_1c_1, & a_3b_1c_2, & a_3b_1c_3, & a_3b_2c_1, & a_3b_2c_2, & a_3b_2c_3, \end{array}$$

olarak ifade edilen toplam $3 \times 2 \times 3 = 18$ tane deneme vardır.

- 2^k faktöriyel tasarımda, 2 düzey sayısını, k ise faktör sayısını gösterir.
- Faktörlerin düzeyleri genellikle (a_0, a_1), (0,1), (düşük, yüksek) veya (-1,1) gibi sembollerle ifade edilir.
- Deneyde etkisi araştırılmak istenen faktör sayısı çok fazla olduğunda, 2^k faktöriyel tasarım, özellikle **süreç geliştirme** (process development) problemlerinde bir sonraki araştırmanın yönünün belirlenmesi için bir ön çalışma niteliği taşır, Box ve ark. (1978), Montgomery (2001), Hinkelmann & Kempthorne (1994) ve Şenoğlu (2005).

Her biri iki düzeye sahip, A ve B gibi iki faktör olduğunda, 2^k faktöriyel tasarım, 2^2 faktöriyel tasarım adını alır. 2^2 faktöriyel tasarımda,

$$(a_0, b_0), (a_1, b_0), (a_0, b_1) \text{ ve } (a_1, b_1)$$

veya

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1) \text{ ve } (1, 1)$$

olarak gösterilen toplam $2^2 = 4$ tane deneme vardır. Bu denemeler, kısaca

$$(1), a, b \text{ ve } ab$$

sembolleriyle gösterilir. Burada,

(1)	:	A faktörünün ve B faktörünün düşük düzeyde,
a	:	A faktörünün yüksek ve B faktörünün düşük düzeyde,
b	:	A faktörünün düşük ve B faktörünün yüksek düzeyde,
ab	:	A faktörünün ve B faktörünün yüksek düzeyde,

olduğunu ifade eder.

- Her biri iki düzeye sahip, A, B ve C gibi üç faktörün olduğu tasarım, 2^3 faktöriyel tasarım olarak adlandırılır.
- Bu tasarımda,

$$a_0b_0c_0, a_1b_0c_0, a_0b_1c_0, a_1b_1c_0, a_0b_0c_1, a_1b_0c_1, a_0b_1c_1, a_1b_1c_1$$

  veya

$$(1), a, b, ab, c, ac, bc, abc$$

  sembolleriyle gösterilen toplam $2^3 = 8$ tane deneme vardır.
- Genelleyecek olursak, 2^k faktöriyel tasarımda, toplam 2^k tane deneme vardır.

Faktöriyel tasarımların, uygulamada öneme sahip bir diğer özel hali ise, 3^k faktöriyel tasarımdır.

- 3^k faktöriyel tasarımda, her biri 3 düzeye sahip toplam k tane faktör vardır.
- Faktör düzeyleri genellikle (a_0, a_1, a_2) veya (0,1,2) sembolleriyle gösterilir.
- Faktör sayısı 2 olduğunda, 3^k faktöriyel tasarım, 3^2 faktöriyel tasarım olarak adlandırılır ve

  $$(a_0, b_0), (a_0, b_1), (a_0, b_2), (a_1, b_0), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_0), (a_2, b_1), (a_2, b_2)$$

  veya

  $$(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)$$

  sembolleriyle gösterilen toplam $3^2 = 9$ tane deneme vardır.
- Benzer şekilde 3^3 faktöriyel tasarımda, toplam $3^3 = 27$, 3^k faktöriyel tasarımda ise toplam 3^k tane deneme vardır.
- 4^k, 5^k, ... faktöriyel tasarımlar için de faktör kombinasyonları veya denemeler benzer şekilde ifade edilebilir.

- Her ne kadar, faktöriyel tasarımlar olarak adlandırsak da aslında faktöriyel tasarımlar, bir tasarım şekli değil bir deneydir.
- Faktör kombinasyonları şeklinde ifade edilen denemeler arasında anlamlı bir fark olup olmadığını test etmek amacıyla daha önceki bölümlerde anlatılan ve ilerleyen bölümlerde anlatılacak olan tasarımlardan yararlanılır.
- Hangi tasarımın tercih edileceği ise önceki bölümlerde belirtilen ve ilerleyen bölümlerde belirtilecek olan kriterlere göre yapılır.
- Bir başka deyişle, deney birimleri arasında homojenliği en fazla sağlayan tasarım tercih edilir.
- Bununla beraber, kitabın bu ve bundan sonraki bölümlerinde literatürdeki yaygın kullanımına uygun olarak “*Faktöriyel Deneyler*” ifadesi yerine “*Faktöriyel Tasarımlar*” ifadesi kullanılacaktır.

Genel Faktöriyel Tasarımlar

A ve B faktörlerinin, sırasıyla a ve b düzeyinin olduğu bir $a \times b$ faktöriyel tasarım için matematiksel model

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \tau\gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \tag{1}$$

$$i = 1, 2, \cdots, a; \quad j = 1, 2, \cdots, b; \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

olarak ifade edilir. Burada,

y_{ijk},	A faktörünün $i-$inci ve B faktörünün $j-$inci düzeyindeki $k-$ıncı gözlem değerini,
μ,	genel ortalamayı,
τ_i,	A faktörünün $i-$inci düzeyinin etkisini,
γ_j,	B faktörünün $j-$inci düzeyinin etkisini,
$\tau\gamma_{ij}$,	A ve B faktörlerinin etkileşim etkisini ve
ε_{ijk},	rasgele hata terimlerini

gösterir.

$a \times b$ Faktöriyel Tasarımlar: Genel Kareler Toplamının Parçalanışı

(1) modelinde, genel kareler toplamı

$$SS_{Toplam} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_{Hata} \tag{2}$$

olarak bileşenlerine ayrılır. Burada,

$$\begin{aligned}
SS_{Toplam} &= \textstyle\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 \\
SS_A &= bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 \\
SS_B &= an\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\
SS_{AB} &= n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 \\
SS_{Hata} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2
\end{aligned} \tag{3}$$

sırasıyla, genel kareler toplamını, A, B ana etkilerinin, AB etkileşim etkisinin ve hatanın kareler toplamını gösterir.

Kareler toplamında kullanılan ifadeler aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} y_{i\cdot\cdot} &= \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{i\cdot\cdot} = \frac{y_{i\cdot\cdot}}{bn} \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, a \\ y_{\cdot j\cdot} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{\cdot j\cdot} = \frac{y_{\cdot j\cdot}}{an} \quad , \quad j = 1, 2, \cdots, b \\ y_{ij\cdot} &= \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{ij\cdot} = \frac{y_{ij\cdot}}{n} \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, a; j = 1, 2, \cdots, b. \end{aligned} \tag{4}$$

Ayrıca, $N = abn$ toplam gözlem sayısını göstermek üzere

$$y_{\cdots} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{\cdots} = \frac{y_{\cdots}}{N} \tag{5}$$

sırasıyla, tüm gözlemlerin toplamı ve tüm gözlemlerin ortalaması olarak tanımlanır.

(1) modelinde,

$$SS_{Deneme} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{...})^2 \tag{6}$$

$$= bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + an\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 +$$
$$n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 \tag{7}$$

$$= SS_A + SS_B + SS_{AB} \tag{8}$$

olarak yazılabilir.

- Bir başka deyişle, SS_{Deneme} ifadesi, A ve B faktörleri ile AB etkileşiminin kareler toplamı olarak bileşenlerine ayrılabilir.
- Dolayısıyla, A, B ve AB etkileşiminin serbestlik derecelerinin toplamı, denemeye ait serbestlik derecesine eşit olur.
- A faktörünün a düzeyi olduğundan serbestlik derecesi $a-1$, B faktörünün b düzeyi olduğundan serbestlik derecesi $b-1$ ve AB etkileşiminin serbestlik derecesi $(a-1)(b-1)$ dir.
- Toplam serbestlik derecesi $N-1$ olduğundan, hatanın serbestlik derecesi $N-ab$ olur.
- Serbestlik dereceleri kısaca aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi yazılabilir.

Kaynak	df
Denemeler	$ab-1$
A	$a-1$
B	$b-1$
AB	$(a-1)(b-1)$
Hata	$N-ab$
Genel	$N-1$

(1) modelinde, A faktörünün anlamlı olup olmadığı, bir başka deyişle,

$$H_{01} : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$$

hipotezi

$$\begin{aligned} F_A &= \frac{SS_A \Big/ (a-1)}{SS_{Hata} \Big/ (N-ab)} \\ &= \frac{MS_A}{MS_{Hata}}, \end{aligned}$$

B faktörünün anlamlı olup olmadığı, bir başka deyişle,

$$H_{02} : \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_b = 0$$

hipotezi

$$\begin{aligned} F_B &= \frac{SS_B \Big/ (b-1)}{SS_{Hata} \Big/ (N-ab)} \\ &= \frac{MS_B}{MS_{Hata}} \end{aligned}$$

ve AB etkileşiminin anlamlı olup olmadığı, bir başka deyişle,

$$H_{03} : \tau\gamma_{11} = \tau\gamma_{12} = \cdots = \tau\gamma_{ab} = 0$$

hipotezi

$$\begin{aligned} F_{AB} &= \frac{SS_{AB} \Big/ (a-1)(b-1)}{SS_{Hata} \Big/ (N-ab)} \\ &= \frac{MS_{AB}}{MS_{Hata}} \end{aligned}$$

test istatistikleri kullanılarak sınanır.

- F_A test istatistiğinin değeri, α anlam düzeyinde, $a-1$ ve $N-ab$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$F_A > \boldsymbol{F}_{\alpha;a-1;N-ab}$$

ise "*A faktörünün düzeyleri arasında anlamlı bir farklılık vardır*" ya da "*A ana etkisi anlamlıdır*" denir.

- F_B test istatistiğinin değeri, α anlam düzeyinde, $b-1$ ve $N-ab$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$F_B > \boldsymbol{F}_{\alpha;b-1;N-ab}$$

ise "*B faktörünün düzeyleri arasında anlamlı bir farklılık vardır*" ya da "*B ana etkisi anlamlıdır*" denir.

- F_{AB} test istatistiğinin değeri, α anlam düzeyinde, $(a-1)(b-1)$ ve $N-ab$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$F_{AB} > \boldsymbol{F}_{\alpha;(a-1)(b-1);N-ab}$$

ise "*A ve B faktörleri arasındaki etkileşim etkisi anlamlıdır*" ya da "*AB etkileşim etkisi anlamlıdır*" denir. ♣

A, B ve C faktörlerinin, sırasıyla a, b ve c düzeyinin olduğu bir $a \times b \times c$ faktöriyel tasarım için matematiksel model

$$y_{ijk\ell} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \tau\gamma_{ij} + \delta_k + \tau\delta_{ik} + \gamma\delta_{jk} + \tau\gamma\delta_{ijk} + \varepsilon_{ijk\ell} \tag{9}$$

$$i = 1, 2, \cdots, a \quad ; \quad j = 1, 2 \cdots, b \quad ; \quad k = 1, 2 \cdots, c \quad ; \quad \ell = 1, 2, \cdots, n$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $\tau\gamma\delta_{ijk}$, A faktörünün $i-$inci, B faktörünün $j-$inci ve C faktörünün $k-$ıncı düzeyi arasındaki etkileşimi gösteren model parametresidir, diğer terimler, (1) modelindekine benzer olarak tanımlanır.

(9) modelinde, genel kareler toplamı

$$SS_{Toplam} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_C + SS_{AC} + SS_{BC} + SS_{ABC} + SS_{Hata} \tag{10}$$

şeklinde bileşenlerine ayrılır. Burada,

$$\begin{aligned}
SS_{Toplam} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n}(y_{ijk\ell} - \bar{y}_{....})^2 & SS_{Hata} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n}(y_{ijk\ell} - \bar{y}_{ijk.})^2 \\
SS_A &= bcn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i...} - \bar{y}_{....})^2 & SS_B &= acn\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{....})^2 \\
SS_{AB} &= cn\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{....})^2 & SS_C &= abn\sum_{k=1}^{c}(\bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....})^2 \\
SS_{AC} &= bn\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}(\bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....})^2 \\
SS_{BC} &= an\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....})^2
\end{aligned} \tag{11}$$

ve

$$SS_{ABC} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\bar{y}_{ijk.} - \bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{i.k.} + \bar{y}_{i...} + \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....})^2 \tag{12}$$

dir.

(11) ve (12) eşitliklerinde verilen kareler toplamlarında yer alan ifadeler,

$$\bar{y}_{i\cdots} = \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n} y_{ijk\ell}}{bcn} \quad , \quad \bar{y}_{\cdot j\cdot\cdot} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n} y_{ijk\ell}}{acn},$$

$$\bar{y}_{\cdot\cdot k\cdot} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{\ell=1}^{n} y_{ijk\ell}}{abn} \quad , \quad \bar{y}_{ij\cdot\cdot} = \frac{\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n} y_{ijk\ell}}{cn},$$

$$\bar{y}_{i\cdot k\cdot} = \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{\ell=1}^{n} y_{ijk\ell}}{bn} \quad , \quad \bar{y}_{\cdot jk\cdot} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{\ell=1}^{n} y_{ijk\ell}}{an}$$

$$\bar{y}_{ijk\cdot} = \frac{\sum_{\ell=1}^{n} y_{ijk\ell}}{n} \quad , \quad \bar{y}_{\cdots\cdot} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\ell=1}^{n} y_{ijk\ell}}{N}$$

olarak tanımlanır. Burada $N = abcn$ dir.

(9) modelinde,

$$SS_{Deneme} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_C + SS_{AC} + SS_{BC} + SS_{ABC} \quad (13)$$

olarak yazılabileceğinden, faktörlere ve etkileşim etkilerine ilişkin serbestlik dereceleri

Kaynak	df
Denemeler	$abc - 1$
A	$a - 1$
B	$b - 1$
AB	$(a-1)(b-1)$
C	$c - 1$
AC	$(a-1)(c-1)$
BC	$(b-1)(c-1)$
ABC	$(a-1)(b-1)(c-1)$
Hata	$N - abc$
Genel	$N - 1$

olur.

- (9) modelinde, ana etkiler ile etkileşim etkilerinin istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını sınamak için aşağıda verilen test istatistikleri kullanılır.

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_{Hata}} \quad , \quad F_B = \frac{MS_B}{MS_{Hata}} \quad , \quad F_{AB} = \frac{MS_{AB}}{MS_{Hata}},$$

$$F_C = \frac{MS_C}{MS_{Hata}} \quad , \quad F_{AC} = \frac{MS_{AC}}{MS_{Hata}} \quad , \quad F_{BC} = \frac{MS_{BC}}{MS_{Hata}},$$

$$F_{ABC} = \frac{MS_{ABC}}{MS_{Hata}}.$$

- (9) modelinde, karar kısmı, (1) modeline benzer olarak elde edilir. Bir başka deyişle, yukarıda verilen test istatistiklerinin değerleri, ilgili serbestlik dereceleri ile $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir.

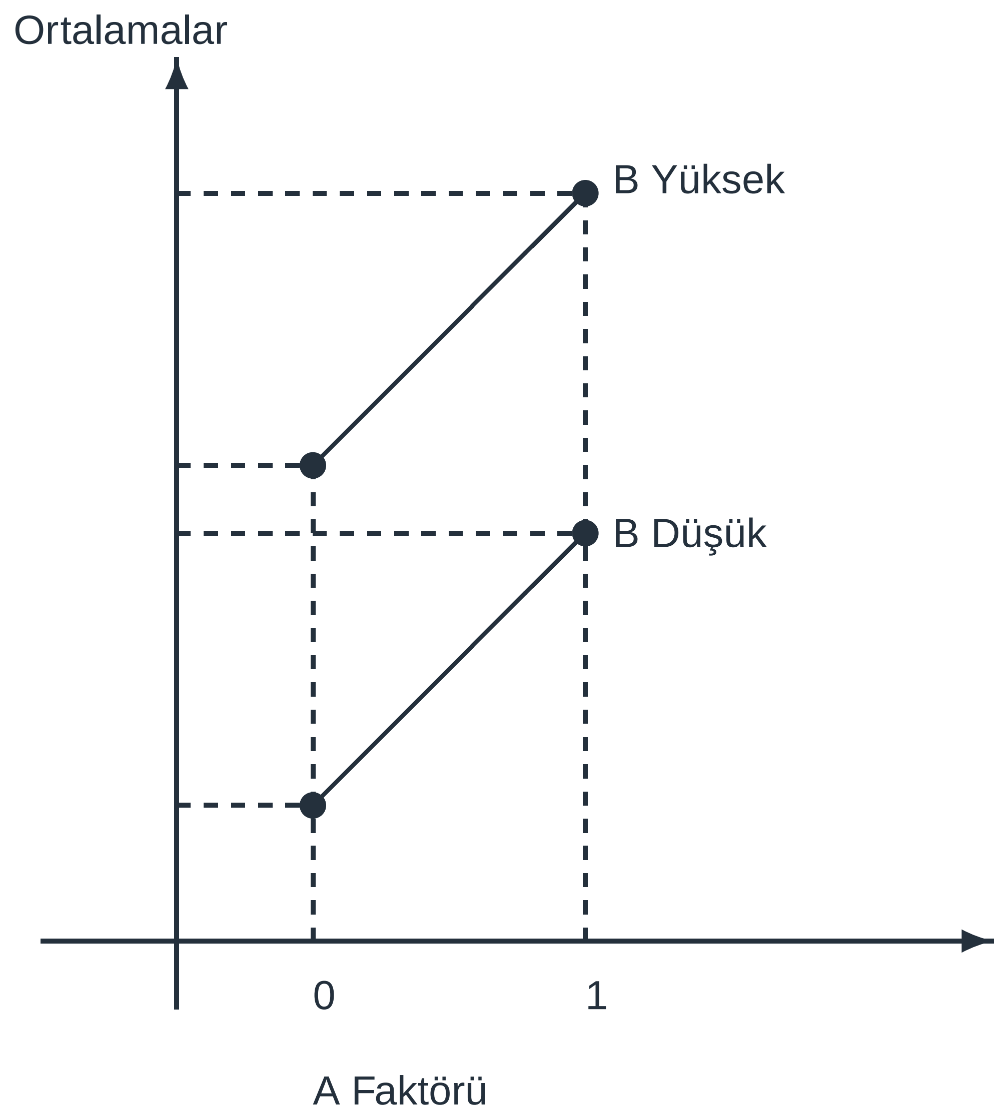
Etkileşim Etkisi

- Faktörler arasındaki etkileşimin anlamlı olup olmadığı istatistiksel testler yardımıyla belirlenebildiği gibi grafiksel yöntemler yardımıyla da belirlenebilir.
- Grafiksel yöntem, subjektif bir yöntem olmasına rağmen pratikte yaygın olarak kullanılır.
- Grafiksel yöntemde A faktörünün düzeylerine karşılık B faktörünün her bir düzeyi için A ve B faktör kombinasyonlarına ait ortalamaların grafiği çizilir.
- Elde edilen grafik kullanılarak faktörler arasında etkileşim olup olmadığına karar verilir.
- Örneğin, A ve B gibi iki faktöre sahip bir deneyde, bu iki faktörün düşük ve yüksek (0,1) olmak üzere iki düzeyi olsun.
- Bu durumda, AB etkileşim etkisi için iki farklı durum söz konusudur:

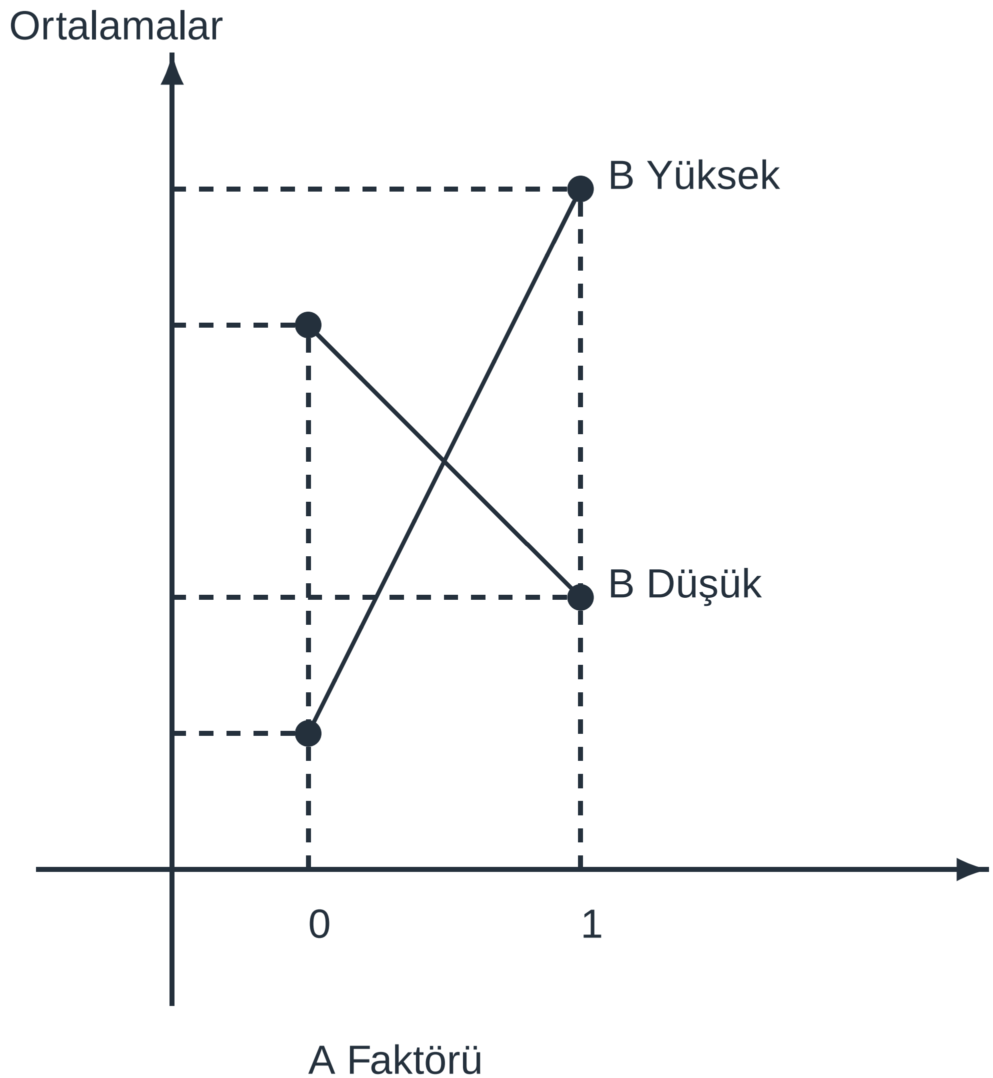
(i) B faktörünün düşük ve yüksek düzeyleri için elde edilen doğrular birbirine paralel ise A ve B faktörleri arasında etkileşim yoktur,

(ii) B faktörünün düşük ve yüksek düzeyleri için elde edilen doğrular birbirine paralel değilse A ve B faktörleri arasındaki etkileşim vardır,

denir.


Ortalamalar
B Yüksek
B Düşük
0
1
A Faktörü

Yukarıdaki şekilde B faktörünün düşük ve yüksek düzeyleri için elde edilen doğrular, birbirine paralel olduğundan, AB etkileşim etkisinin istatistiksel olarak anlamlı olmadığı söylenir.


Ortalamalar
B Yüksek
B Düşük
0
1
A Faktörü

Bu şekilde ise B faktörünün düşük ve yüksek düzeyleri için elde edilen doğrular, birbirine paralel olmadığından, AB etkileşim etkisinin istatistiksel olarak anlamlı olduğu söylenir.

Bir Tekrarlı $a \times b$ Faktöriyel Tasarımlar

- Bir tekrarlı $a \times b$ faktöriyel tasarım için matematiksel model

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, a; \quad j = 1, 2, \cdots, b \tag{14}$$

dir.

- Bu modelde,

$$\mu_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma_j$$

denemeler olarak düşünüldüğünde, denemelerin serbestlik derecesinin $ab - 1$ olacağı açıktır.
- Öte yandan, tüm gözlem sayısı $N = ab$ dir ve toplam serbestlik derecesi de $ab - 1$ olacaktır.
- Bu durumda, hatanın serbestlik derecesi sıfır olur.
- Böyle bir durum pratik ve teorik olarak mümkün olamayacağından, bir tekrarlı faktöriyel tasarımlarda en yüksek dereceli etkileşim genellikle hata terimi olarak alınır; çünkü yüksek dereceden etkileşimlerin genellikle önemsiz olduğu varsayılır.
- Bu durumda, ANOVA tablosu, Tablo aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

Kaynak	df	SS	MS	F
A	$a-1$	SS_A	MS_A	F_A
B	$b-1$	SS_B	MS_B	F_B
Hata (AB)	$(a-1)(b-1)$	SS_{Hata}	MS_{Hata}	
Genel	$N-1$	SS_{Toplam}		

2^2 Faktöriyel Tasarım

2^2 faktöriyel tasarım için matematiksel model

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \tau\gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \qquad (15)$$

$$i = 1,2; \quad j = 1,2; \quad k = 1,2,\cdots,n$$

dir. Burada,

y_{ijk},	A faktörünün $i-$inci ve B faktörünün $j-$inci düzeyindeki $k-$ıncı gözlem değerini,
μ,	genel ortalamayı,
τ_i,	A faktörünün $i-$inci düzeyinin etkisini,
γ_j,	B faktörünün $j-$inci düzeyinin etkisini,
$\tau\gamma_{ij}$,	A ve B faktörlerinin etkileşim etkisini ve
ε_{ijk},	rasgele hata terimlerini

gösterir.

2^2 faktöriyel tasarım için veri yapısı aşağıdaki gibidir.

	B Faktörü	
A Faktörü	Düşük (0)	Yüksek (1)
Düşük (0)	$y_{111}, y_{112}, \cdots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \cdots, y_{12n}$
Yüksek (1)	$y_{211}, y_{212}, \cdots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \cdots, y_{22n}$

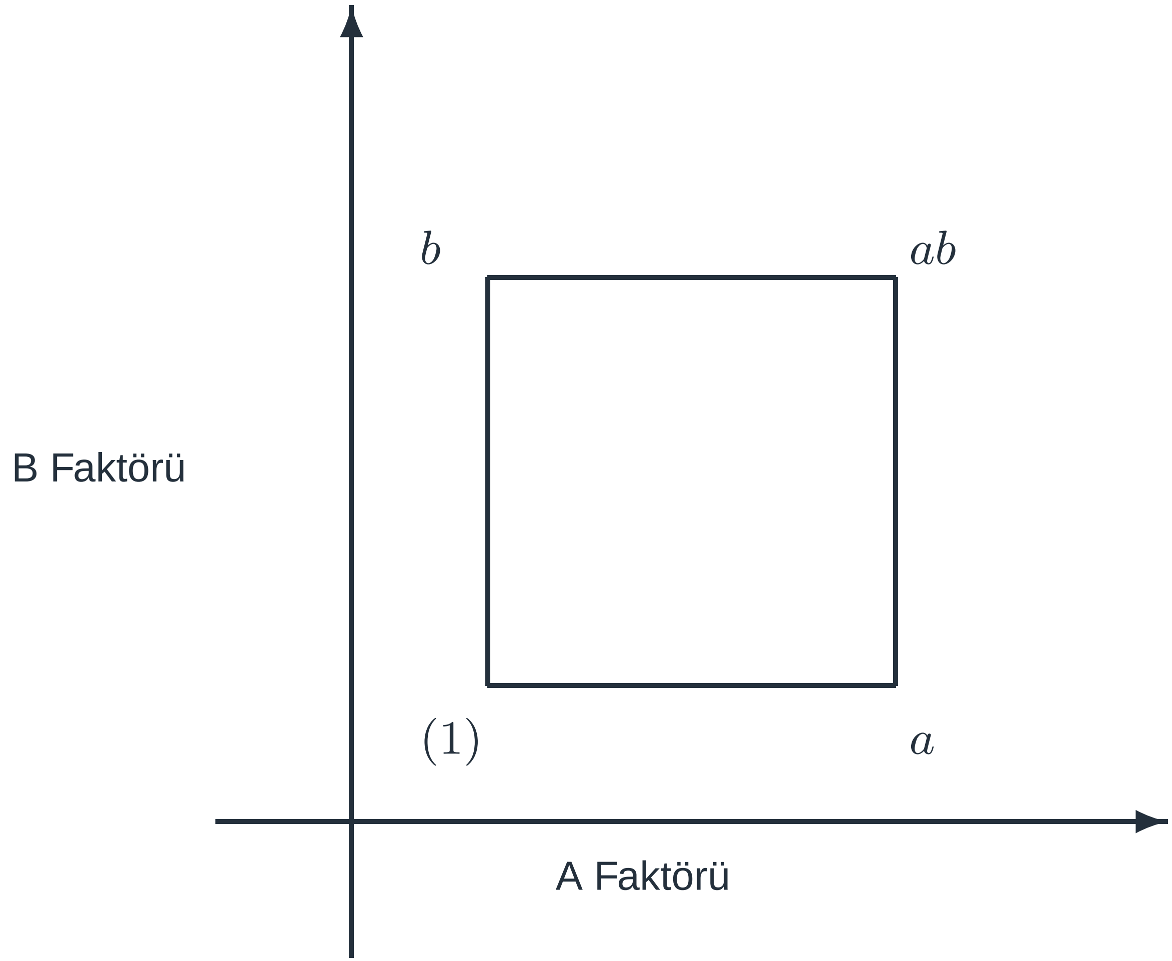
2^2 faktöriyel tasarımda, daha önce de bahsedildiği gibi, faktörlerin düşük ve yüksek düzeyleri için dört farklı deneme kombinasyonu söz konusudur:

A	B	Deneme Kombinasyonları
Düşük	Düşük	(1)
Yüksek	Düşük	a
Düşük	Yüksek	b
Yüksek	Yüksek	ab

Yukarıda verilen veri yapısı dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
(1) &= \sum_{k=1}^{n} y_{11k}, & a &= \sum_{k=1}^{n} y_{21k} \\
b &= \sum_{k=1}^{n} y_{12k}, & ab &= \sum_{k=1}^{n} y_{22k}
\end{aligned}$$

dır.


B Faktörü
b
ab
(1)
a
A Faktörü

B nin yüksek düzeyinde, A nın etkisi

$$\frac{ab-b}{n}$$

ve B nin düşük düzeyinde, A nın etkisi

$$\frac{a-(1)}{n}$$

dir. Dolayısıyla, B nin tüm düzeylerinde A nın etkisi, bu etkilerin ortalaması olacağından,

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{ab-b}{n} + \frac{a-(1)}{n}\right] \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2n}[ab-b+a-(1)] \tag{17}$$

elde edilir. (17) denklemi, A faktörünün ana etkisi olarak tanımlanır.

A nın yüksek düzeyinde, B nin etkisi

$$\frac{ab-a}{n}$$

ve A nin düşük düzeyinde, B nin etkisi

$$\frac{b-(1)}{n}$$

dir. Dolayısıyla, A nın tüm düzeylerinde B nin etkisi, bu etkilerin ortalaması olacağından

$$B = \frac{1}{2}\left[\frac{ab-a}{n} + \frac{b-(1)}{n}\right] \tag{18}$$

$$= \frac{1}{2n}[ab-a+b-(1)] \tag{19}$$

elde edilir. (19) denklemi, B faktörünün ana etkisi olarak tanımlanır.
AB etkileşim etkisi ise, B nin yüksek düzeyindeki A nın etkisi ile B nin düşük düzeyindeki A nın etkisi arasındaki farkın ortalaması olarak tanımlanır:

$$AB = \frac{1}{2n}[ab+(1)-a-b]. \tag{20}$$

(17), (19) ve (20) eşitliklerinde verilen köşeli parantez içindeki ifadeler sırasıyla A, B ve AB etkilerinin bağıntıları olarak ifade edilir. Bir başka deyişle,

$$\begin{aligned} \text{Bağıntı}_A &= ab + a - b - (1) \\ \text{Bağıntı}_B &= ab + b - a - (1) \\ \text{Bağıntı}_{AB} &= ab + (1) - a - b \end{aligned} \tag{21}$$

dir. 2^2 faktöriyel tasarımda bağıntı katsayıları, aşağıda gösterildiği gibi elde edilir.

Etkiler	(1)	a	b	ab
A	-1	1	-1	1
B	-1	-1	1	1
AB	1	-1	-1	1

- Dikkat edilirse, faktörlere ve etkileşime ait bağıntı katsayıları birbirine diktir. Bu ifade, yukarıdaki tabloda satırların birbirine dik; bir başka deyişle, satırların karşılıklı çarpımlarının toplamının sıfır olması anlamına gelmektedir.

(21) de verilen bağıntılar,

$$
\begin{aligned}
\text{Bağıntı}_A &= (a-1)(b+1) \\
\text{Bağıntı}_B &= (a+1)(b-1) \\
\text{Bağıntı}_{AB} &= (a-1)(b-1)
\end{aligned}
\tag{22}
$$

cebirsel çarpma işlemi kullanılarak da elde edilebilirler. (22) eşitliğinin avantajı, bağıntıların akılda kalmasını kolaylaştırmasıdır.

- (22) deki eşitlikler, ilgilenilen faktöre -1 diğer faktöre +1 değeri verilerek yapılan çarpma işlemi sonucunda elde edilir. Dikkat edilmelidir ki, burada yapılan çarpma işlemleri semboliktir, sadece kolaylık sağlaması bakımından önemlidir.

(15) modelinde, hata terimlerinin kareleri toplamının ilgili parametreye göre minimum yapılmasıyla bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında parametrelerin LS tahmin edicileri,

$$\tilde{\mu} = \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot} \tag{23}$$

$$\tilde{\tau}_i = \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot} \tag{24}$$

$$\tilde{\gamma}_j = \bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot} \tag{25}$$

$$\tilde{\tau\gamma}_{ij} = \bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot} \tag{26}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})^2}{2^2(n-1)} \tag{27}$$

olarak elde edilir.

(15) modelinde, A ve B faktörlerinin ana etkileri ile AB etkileşim etkisinin istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı test edilir. Her bir durum için hipotezler sırasıyla

$$H_{01} : \tau_1 = \tau_2 = 0 \tag{28}$$

(veya H_{01} : A ana etkisi anlamlı değildir)

$$H_{02} : \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \tag{29}$$

(veya H_{02} : B ana etkisi anlamlı değildir)

ve

$$H_{03} : \tau\gamma_{11} = \tau\gamma_{12} = \tau\gamma_{21} = \tau\gamma_{22} = 0 \tag{30}$$

(veya H_{03} : AB etkileşimi anlamlı değildir)

dir.

(15) modelinde, genel kareler toplamı

$$SS_{Toplam} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 \tag{31}$$

olup

$$SS_{Toplam} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_{Hata} \tag{32}$$

şeklinde bileşenlerine ayrılır. Burada

$$\begin{aligned}
SS_A &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 = 2n\sum_{i=1}^{2}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 \\
SS_B &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 = 2n\sum_{j=1}^{2}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\
SS_{AB} &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 \\
&= n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\
SS_{Hata} &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2
\end{aligned} \tag{33}$$

ve

$$\begin{aligned}
y_{i..} &= \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{i..} = \frac{y_{i..}}{2n} \quad , \quad i = 1,2 \\
y_{.j.} &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{.j.} = \frac{y_{.j.}}{2n} \quad , \quad j = 1,2 \\
y_{ij.} &= \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{ij.} = \frac{y_{ij.}}{n} \quad , \quad i = 1,2; j = 1,2
\end{aligned} \tag{34}$$

olarak ifade edilir.
Ayrıca, $N = 2^2 n$ toplam gözlem sayısını göstermek üzere

$$y_{...} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{...} = \frac{y_{...}}{N} \tag{35}$$

sırasıyla tüm gözlemlerin toplamı ve tüm gözlemlerin ortalaması olarak tanımlanır.

SS_A, SS_B ve SS_{AB} kareler toplamları, bağıntılar cinsinden de yazılabilir. Genel olarak, kareler toplamı

$$SS = \frac{[\text{Bağıntı}]^2}{2^2 n} \tag{36}$$

dir. Bu formülden

$$\begin{aligned} SS_A &= \frac{1}{2^2 n}[ab + a - b - (1)]^2 \\ SS_B &= \frac{1}{2^2 n}[ab + b - a - (1)]^2 \\ SS_{AB} &= \frac{1}{2^2 n}[ab + (1) - a - b]^2 \end{aligned} \tag{37}$$

elde edilir. 2^2 faktöriyel tasarımda, (37) i kullanmak, (33) yi kullanmaktan daha yaygındır.

(15) modelinde, sırasıyla (28), (29) ve (30) hipotezlerini sınamak için

$$F_A = \frac{SS_A \big/ 1}{SS_{Hata} \big/ 2^2(n-1)} = \frac{MS_A}{MS_{Hata}} \tag{38}$$

$$F_B = \frac{SS_B \big/ 1}{SS_{Hata} \big/ 2^2(n-1)} = \frac{MS_B}{MS_{Hata}} \tag{39}$$

ve

$$F_{AB} = \frac{SS_{AB} \big/ 1}{SS_{Hata} \big/ 2^2(n-1)} = \frac{MS_{AB}}{MS_{Hata}} \tag{40}$$

test istatistikleri kullanılır.

Teorem 1.1 (15) *modelinde, H_0 hipotezi altında, F_A, F_B ve F_{AB}test istatistiklerinin her biri, 1 ve $2^2(n-1)$ serbestlik dereceli merkezi $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahiptir.*

- F_A, F_B ve F_{AB} test istatistiklerinin değeri, α anlam düzeyinde, 1 ve $2^2(n-1)$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$\begin{aligned} F_A &> \boldsymbol{F}_{\alpha;1;2^2(n-1)} \\ F_B &> \boldsymbol{F}_{\alpha;1;2^2(n-1)} \\ F_{AB} &> \boldsymbol{F}_{\alpha;1;2^2(n-1)} \end{aligned}$$

ise sırasıyla

"*A ana etkisi istatistiksel olarak anlamlıdır*",

"*B ana etkisi istatistiksel olarak anlamlıdır*"

ve

"*AB etkileşim etkisi anlamlıdır,*"

denir. ♣

Yukarıda elde edilen bilgiler ışığında, 2^2 faktöriyel tasarım için ANOVA tablosu, aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

Kaynak	df	SS	MS	F
A	1	SS_A	MS_A	F_A
B	1	SS_B	MS_B	F_B
AB	1	SS_{AB}	MS_{AB}	F_{AB}
Hata	$2^2(n-1)$	SS_{Hata}	MS_{Hata}	
Genel	$N-1$	SS_{Toplam}		

2^2 Faktöriyel Tasarım: Küçük bir hatırlatma

(15) modelinde, parametrelerin LS tahmin edicileri ve kareler toplamları hatırlanırsa

$$\begin{aligned}
SS_A &= 2n\sum_{i=1}^{2}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 = 2n\sum_{i=1}^{2}\tilde{\tau}_i^2 \\
SS_B &= 2n\sum_{j=1}^{2}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2 = 2n\sum_{j=1}^{2}\tilde{\gamma}_j^2 \\
SS_{AB} &= n\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2 = n\sum_{k=1}^{n}\tilde{\tau\gamma}_{ij}^2
\end{aligned} \tag{41}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür.

Bir başka deyişle F_A, F_B ve F_{AB} test istatistikleri LS tahmin edicilerine dayalıdır ve bunun bir sonucu olarak normallik varsayımı altında en güçlü test istatistikleridir.

2^3 Faktöriyel Tasarım

2^3 Faktöriyel Tasarım: Matematiksel Model

2^3 faktöriyel tasarım için matematiksel model

$$y_{ijk\ell} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \tau\gamma_{ij} + \delta_k + \tau\delta_{ik} + \gamma\delta_{jk} + \tau\gamma\delta_{ijk} + \varepsilon_{ijk\ell} \qquad (42)$$

$$i = 1,2 \quad ; \quad j = 1,2 \quad ; \quad k = 1,2 \quad ; \quad \ell = 1,2,\cdots,n$$

dir.

Burada $\tau\gamma\delta_{ijk}$ A faktörünün $i-$inci, B faktörünün $j-$inci ve C faktörünün $k-$ıncı düzeyinin etkleşimini gösteren model parametresidir. Modeldeki diğer parametreler, 2^2 faktöriyel tasarımda olduğu gibi tanımlanır.

2^3 faktöriyel tasarımda, daha önce de bahsedildiği gibi, faktörlerin düşük ve yüksek düzeyleri için sekiz farklı deneme kombinasyonu söz konusudur:

A	B	C	Deneme Kombinasyonları
Düşük	Düşük	Düşük	(1)
Yüksek	Düşük	Düşük	a
Düşük	Yüksek	Düşük	b
Yüksek	Yüksek	Düşük	ab
Düşük	Düşük	Yüksek	c
Yüksek	Düşük	Yüksek	ac
Düşük	Yüksek	Yüksek	bc
Yüksek	Yüksek	Yüksek	abc

B ve C düşük düzeyde iken A nın etkisi

$$\frac{a-(1)}{n},$$

B yüksek, C düşük düzeyde iken A nın etkisi

$$\frac{ab-b}{n},$$

B düşük, C yüksek düzeyde iken A nın etkisi

$$\frac{ac-c}{n}$$

B ve C yüksek düzeyde iken A nın etkisi

$$\frac{abc-bc}{n}$$

dir. Dolayısıyla, A faktörünün ana etkisi

$$A = \frac{1}{4}\left[\frac{a-(1)}{n}+\frac{ab-b}{n}+\frac{ac-c}{n}+\frac{abc-bc}{n}\right] \quad (43)$$

$$= \frac{1}{2^2 n}[abc+ac+ab+a-bc-c-b-(1)] \quad (44)$$

Benzer şekilde, B ve C faktörlerinin ana etkileri ile AB, AC, BC ve ABC etkileşim etkileri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$B = \frac{1}{2^2 n}[abc + bc + ab + b - ac - a - c - (1)] \tag{45}$$

$$C = \frac{1}{2^2 n}[abc + bc + ac + c - a - b - ab - (1)] \tag{46}$$

$$AB = \frac{1}{2^2 n}[abc + ab + c + (1) - bc - ac - a - b] \tag{47}$$

$$AC = \frac{1}{2^2 n}[abc + ac + b + (1) - bc - ab - a - c] \tag{48}$$

$$BC = \frac{1}{2^2 n}[abc + bc + a + (1) - ac - ab - b - c] \tag{49}$$

$$ABC = \frac{1}{2^2 n}[abc + a + b + c - bc - ac - ab - (1)] \tag{50}$$

2^3 faktöriyel tasarımda, bağıntılar

$$
\begin{aligned}
\text{Bağıntı}_A &= abc + ac + ab + a - bc - c - b - (1)\\
\text{Bağıntı}_B &= abc + bc + ab + b - ac - a - c - (1)\\
\text{Bağıntı}_{AB} &= abc + ab + c + (1) - bc - ac - a - b\\
\text{Bağıntı}_C &= abc + bc + ac + c - a - b - ab - (1)\\
\text{Bağıntı}_{AC} &= abc + ac + b + (1) - bc - ab - a - c\\
\text{Bağıntı}_{BC} &= abc + bc + a + (1) - ac - ab - b - c\\
\text{Bağıntı}_{ABC} &= abc + a + b + c - bc - ac - ab - (1)
\end{aligned} \tag{51}
$$

dir.

(51) de verilen eşitlikler elde edilirken kullanılan bağıntı katsayıları aşağıdaki tabloda gösterildiği gibidir.

Etkiler	(1)	a	b	ab	c	ac	bc	abc
A	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
B	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
AB	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
C	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
AC	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
BC	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
ABC	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1

(51) de verilen bağıntılar, cebirsel çarpma işlemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\text{Bağıntı}_A &= (a-1)(b+1)(c+1)\\
\text{Bağıntı}_B &= (a+1)(b-1)(c+1)\\
\text{Bağıntı}_{AB} &= (a-1)(b-1)(c+1)\\
\text{Bağıntı}_C &= (a+1)(b+1)(c-1)\\
\text{Bağıntı}_{AC} &= (a-1)(b+1)(c-1)\\
\text{Bağıntı}_{BC} &= (a+1)(b-1)(c-1)\\
\text{Bağıntı}_{ABC} &= (a-1)(b-1)(c-1)
\end{aligned} \tag{52}$$

şeklinde de ifade edilebilirler.

- (52) eşitlikleri, ilgili faktör(ler)e -1 diğer(ler)ine +1 değeri verilerek yapılan çarpma işlemi sonucunda elde edilir. Ancak; (52) eşitliklerindeki çarpma işlemi semboliktir, daha önce de söylendiği gibi sadece kolaylık sağlaması bakımından önemlidir.

(42) modelinde, parametrelerin LS tahmin edicileri

$$\tilde{\mu} = \bar{y}_{....} \tag{53}$$
$$\tilde{\tau}_i = \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{....} \tag{54}$$
$$\tilde{\gamma}_j = \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{....} \tag{55}$$

$$\tilde{\tau\gamma}_{ij} = \bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{....} \tag{56}$$
$$\tilde{\delta}_k = \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....} \tag{57}$$
$$\tilde{\tau\delta}_{ik} = \bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....} \tag{58}$$
$$\tilde{\gamma\delta}_{jk} = \bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....} \tag{59}$$

$$\tilde{\tau\gamma\delta}_{ijk} = \bar{y}_{ijk.} - \bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{.jk.} + \bar{y}_{i...} + \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....} \tag{60}$$

ve

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}(y_{ijk\ell} - \bar{y}_{ijk.})^2}{2^3(n-1)} \tag{61}$$

dir.

(42) modelinde, A, B ve C ana etkileri ile AB, BC, AC ve ABC etkileşim etkilerinin istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı test edilir. Her bir durum için hipotezler sırasıyla,

$$H_{01} : \forall \tau_i = 0 \quad i = 1, 2 \tag{62}$$

(veya H_{01} : A ana etkisi anlamlı değildir)

$$H_{02} : \forall \gamma_j = 0 \quad j = 1, 2 \tag{63}$$

(veya H_{02} : B ana etkisi anlamlı değildir)

$$H_{03} : \forall \tau\gamma_{ij} = 0 \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2 \tag{64}$$

(veya H_{03} : AB etkileşim etkisi anlamlı değildir)

$$H_{04} : \forall \delta_k = 0 \quad k = 1, 2 \tag{65}$$

(veya H_{04} : C ana etkisi anlamlı değildir)

$$H_{05} : \forall \tau\delta_{ik} = 0 \quad i = 1,2; \quad k = 1,2 \tag{66}$$

(veya H_{05} : AC etkileşim etkisi anlamlı değildir)

$$H_{06} : \forall \gamma\delta_{jk} = 0 \quad j = 1,2; \quad k = 1,2 \tag{67}$$

(veya H_{06} : BC etkileşim etkisi anlamlı değildir)

ve

$$H_{07} : \forall \tau\gamma\delta_{ijk} = 0 \quad i = 1,2; \quad j = 1,2; \quad k = 1,2 \tag{68}$$

(veya H_{07} : ABC etkileşim etkisi anlamlı değildir)

olarak ifade edilir.

(42) modeli için

$$SS_{Toplam} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_C + SS_{AC} + SS_{BC} + SS_{ABC} + SS_{Hata} \tag{69}$$

olup Burada,

$$\begin{aligned}
SS_A &= 2^2 n \sum_{i=1}^{2} (\bar{y}_{i\cdots} - \bar{y}_{\cdots\cdot})^2 \\
SS_B &= 2^2 n \sum_{j=1}^{2} (\bar{y}_{\cdot j\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdots\cdot})^2 \\
SS_{AB} &= 2n \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} (\bar{y}_{ij\cdot\cdot} - \bar{y}_{i\cdots} - \bar{y}_{\cdot j\cdot\cdot} + \bar{y}_{\cdots\cdot})^2 \\
SS_C &= 2^2 n \sum_{k=1}^{2} (\bar{y}_{\cdot\cdot k\cdot} - \bar{y}_{\cdots\cdot})^2 \\
SS_{AC} &= 2n \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} (\bar{y}_{i\cdot k\cdot} - \bar{y}_{i\cdots} - \bar{y}_{\cdot\cdot k\cdot} + \bar{y}_{\cdots\cdot})^2 \\
SS_{BC} &= 2n \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} (\bar{y}_{\cdot jk\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot k\cdot} + \bar{y}_{\cdots\cdot})^2 \\
SS_{ABC} &= n \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} (\bar{y}_{ijk\cdot} - \bar{y}_{ij\cdot\cdot} - \bar{y}_{i\cdot k\cdot} + \bar{y}_{\cdot jk\cdot} + \bar{y}_{i\cdots} + \bar{y}_{\cdot j\cdot\cdot} + \bar{y}_{\cdot\cdot k\cdot} - \bar{y}_{\cdots\cdot})^2 \\
SS_{Hata} &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n} (y_{ijk\ell} - \bar{y}_{ijk\cdot})^2
\end{aligned} \tag{70}$$

dir.

(70) de verilen kareler toplamları, bağıntılar cinsinden

$$SS = \frac{[\text{Bağıntı}]^2}{2^3 n} \tag{71}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu formülden,

$$\begin{aligned}
SS_A &= \frac{1}{2^3 n}[abc + ac + ab + a - bc - c - b - (1)]^2 \\
SS_B &= \frac{1}{2^3 n}[abc + bc + ab + b - ac - a - c - (1)]^2 \\
SS_{AB} &= \frac{1}{2^3 n}[abc + ab + c + (1) - bc - ac - a - b]^2 \\
SS_C &= \frac{1}{2^3 n}[abc + bc + ac + c - a - b - ab - (1)]^2 \\
SS_{AC} &= \frac{1}{2^3 n}[abc + ac + b + (1) - bc - ab - a - c]^2 \\
SS_{BC} &= \frac{1}{2^3 n}[abc + bc + a + (1) - ac - ab - b - c]^2 \\
SS_{ABC} &= \frac{1}{2^3 n}[abc + a + b + c - bc - ac - ab - (1)]^2
\end{aligned} \tag{72}$$

dir.

(42) modelinde, (62), (63), (64), (65), (66), (67) ve (68) hipotezlerini sınamak için sırasıyla

$$F_A = \frac{SS_A \big/ 1}{SS_{Hata} \big/ 2^3(n-1)} = \frac{MS_A}{MS_{Hata}} \qquad F_B = \frac{SS_B \big/ 1}{SS_{Hata} \big/ 2^3(n-1)} = \frac{MS_B}{MS_{Hata}}$$

$$F_{AB} = \frac{SS_{AB} \big/ 1}{SS_{Hata} \big/ 2^3(n-1)} = \frac{MS_{AB}}{MS_{Hata}} \qquad F_C = \frac{SS_C \big/ 1}{SS_{Hata} \big/ 2^3(n-1)} = \frac{MS_C}{MS_{Hata}}$$

$$F_{AC} = \frac{SS_{AC} \big/ 1}{SS_{Hata} \big/ 2^3(n-1)} = \frac{MS_{AC}}{MS_{Hata}} \qquad F_{BC} = \frac{SS_{BC} \big/ 1}{SS_{Hata} \big/ 2^3(n-1)} = \frac{MS_{BC}}{MS_{Hata}}$$

$$F_{ABC} = \frac{SS_{ABC} \big/ 1}{SS_{Hata} \big/ 2^3(n-1)} = \frac{MS_{ABC}}{MS_{Hata}}$$

Teorem 1.2 (42) *modelinde, H_0 hipotezi altında F_A, F_B, F_{AB}, F_C, F_{AC}, F_{BC} ve F_{ABC} test istatistiklerinin her biri, 1 ve $2^3(n-1)$ serbestlik dereceli merkezi $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahiptir.*

Yukarıda elde edilen bilgiler ışığında, 2^3 faktöriyel tasarım için ANOVA tablosu, aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

Kaynak	df	SS	MS	F
A	1	SS_A	MS_A	F_A
B	1	SS_B	MS_B	F_B
AB	1	SS_{AB}	MS_{AB}	F_{AB}
C	1	SS_C	MS_C	F_C
AC	1	SS_{AC}	MS_{AC}	F_{AC}
BC	1	SS_{BC}	MS_{BC}	F_{BC}
ABC	1	SS_{ABC}	MS_{ABC}	F_{ABC}
Hata	$2^3(n-1)$	SS_{Hata}	MS_{Hata}	
Genel	$N-1$	SS_{Toplam}		

2^3 faktöriyel tasarım için karar kısmı, 2^2 faktöriyel tasarıma benzer şekilde ifade edilebilir.

2^k Faktöriyel Tasarım

2^k faktöriyel tasarımda, her biri iki düzeye sahip k tane faktör ve bu faktörlerin birbirleriyle olan etkileşimleri söz konusudur. 2^k faktöriyel tasarımın matematiksel modeli

$$y_{ij\cdots p\ell} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \tau\gamma_{ij} + \cdots + \delta_p + \tau\delta_{ip} + \cdots + \tau\gamma\cdots\delta_{ij\cdots p} + \varepsilon_{ij\cdots p\ell}, \tag{73}$$

$$i = 1,2; \quad j = 1,2; \cdots p = 1,2; \quad \ell = 1,2,\cdots,n$$

olarak ifade edilir.
2^k faktöriyel tasarımda, ana etkiler ve etkileşim etkileri için bağıntılar

$$\text{Bağıntı}_X = (a \mp 1)(b \mp 1)\cdots(p \mp 1) \tag{74}$$

olarak ifade edilir. Ana etkiler ve etkileşim etkileri

$$X = \frac{1}{2^{k-1}n}\text{Bağıntı}_X \tag{75}$$

kareler toplamları ise

$$SS_X = \frac{1}{2^k n}\left[\text{Bağıntı}_X\right]^2 \tag{76}$$

formülleri yardımıyla hesaplanır.

Ana etkiler ve etkileşim etkilerinin serbestlik derecesi 1 olduğundan SS_X kareler toplamı MS_X kareler ortalamasına eşittir.
Burada X, 2^k faktöriyel tasarımda kullanılan faktörleri veya faktör etkileşimlerini göstermektedir.
Ana etkilerin ve etkileşim etkilerinin anlamlı olup olmadığını sınamak için

$$F_X = \frac{MS_X}{MS_{Hata}} \tag{77}$$

test istatistiği kullanılır. Hata kareler toplamı ve hata kareler ortalaması sırasıyla

$$SS_{Hata} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \cdots \sum_{p=1}^{2} \sum_{\ell=1}^{n} (y_{ij\cdots p\ell} - \bar{y}_{ij\cdots p\cdot})^2 \tag{78}$$

ve

$$MS_{Hata} = \frac{SS_{Hata}}{2^k(n-1)} \tag{79}$$

formülleri yardımıyla hesaplanır.

Etki Karışımı

- Faktöriyel tasarımlarda, faktörlerin kombinasyonu olarak ifade edilen denemelerin sayısı bloklardaki deney birimi sayısından daha fazla olduğunda denemelerin tamamını aynı blokta kullanmak, bir başka deyişle **tam tekrar** (complete replication) yapmak mümkün olmayabilir.
- Bu durumda, deneme sayısının yarı büyüklüğünde iki farklı blok kullanarak bu sorun giderilmeye çalışılır.
- Ancak, denemelerin yarısını birinci blokta diğer yarısını ikinci blokta kullanmak bazı faktöriyel etkilerin (ana etkiler veya etkileşim etkileri) **bloklarla karışmasına** (confounding) neden olur.
- Bir başka deyişle, faktöriyel etki ile blok etkisi ayırt edilemez (özdeş) olur ve hangi faktöriyel etkinin bloklarla karıştırılacağı problemi gündeme gelir.
- Faktöriyel tasarımlarda, yüksek dereceli etkileşimlerin, ana etkilere ve düşük dereceli etkileşimlere göre, daha az önemli olduğu düşünüldüğünden veya bir başka deyişle yüksek dereceli etkileşimlerden elde edilecek bilginin ana etkilerden veya düşük dereceli etkileşimlerden elde edilecek bilgiye göre daha gözden çıkarılabilir olduğu düşünüldüğünden (bkz. Hinkelmann & Kempthnone, 1994, Montgomery, 2001), bloklarla karıştırılacak olan faktöriyel etki genellikle yüksek dereceli etkileşimler arasından seçilir.

- Denemelerin tamamını aynı blokta kullanmak mümkün olmadığından, burada tanıtılan tasarım eksik blok tasarımı olarak da isimlendirilir (bkz. Bölüm 10).
- Ancak, faktöriyel tasarımların özel yapısı gereği veri analizi kısmı, Bölüm 10 da anlatılan dengeli eksik blok tasarımlara göre daha kolaydır (Montgomery, 2001).
- Burada, dikkat edilmesi gereken diğer bir husus, kaynaklar yeterli olsa bile çok sayıda deney birimi içeren bloklar kullanıldığında deneysel hatayı kontrol altına almak için kullanılan "bloklama" ilkesinden uzaklaşılmış olur ve etki karışımı kullanmak gerekliliği doğar, bkz. Kuehl (2000).

2^2 Faktöriyel Tasarımda Etki Karışımı

2^2 faktöriyel tasarımda, deneme kombinasyonları

$$(1), \quad a, \quad b, \quad ab$$

dir. Elimizde, her biri iki tane deney birimi içeren iki farklı blok olduğunu ve AB etkileşim etkisinin bloklarla karıştırılmasına karar verildiğini varsayalım.
AB etkileşim etkisi bloklarla karıştırılacağından, bağıntı tablosunda AB etkileşimine karşılık gelen satır göz önüne alınır:

Etki	(1)	a	b	ab
AB	1	-1	-1	1

AB satırında "$+$" işaretli olan

$$(1), \quad ab$$

deneme kombinasyonları birinci bloğa,
AB satırında "$-$" işaretli olan

$$a, \quad b$$

deneme kombinasyonları da ikinci bloğa alınır.

2^2 Faktöriyel Tasarımda Etki Karışımı

AB

1. Blok	2. Blok
(1)	a
ab	b

AB etkileşim etkisi bloklarla karıştırıldığından dolayı blok etkisi ile aynı olur. Bir başka deyişle, AB etkileşim etkisi, blok etkisinden ayrılamaz. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\text{Blok Etkisi} &= \text{1. Blok Ortalaması} - \text{2. Blok Ortalaması} && (80)\\
&= \frac{(1)+ab}{2} - \frac{a+b}{2} && (81)\\
&= \frac{1}{2}[ab + (1) - a - b] && (82)\\
&= AB && (83)
\end{aligned}$$

dir.

Blok etkisi ile karıştırılmamış olan A ve B ana etkileri ise, daha önce verilen

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2n}[ab + a - b - (1)]\\
B &= \frac{1}{2n}[ab + b - a - (1)]
\end{aligned}$$

formülleri yardımıyla hesaplanır.

2^2 faktöriyel tasarımda AB etkileşim etkisi bloklarla karıştırıldığında ve bu işlem r defa tekrarlandığında ANOVA tablosu, aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

Kaynak	df	SS
Bloklar	$2r-1$	SS_{Blok}
Tekrarlar	$r-1$	SS_{Tekrar}
AB	1	SS_{AB}
Tekrarlar$\times$AB	$r-1$	$SS_{Tekrar \times AB}$
A	1	SS_A
B	1	SS_B
Hata (Tekrarlar$\times$A+Tekrarlar$\times$B)	$2(r-1)$	SS_{Hata}
Genel	$4r-1$	SS_{Toplam}

- Tekrarlar ve AB arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığı sınanırken, hata terimi olarak Tekrarlar$\times$AB etkileşimi kullanılır.
- Ancak, Tekrarlar$\times$AB etkileşimine ait serbestlik derecesi az olduğundan F testinin gücü de az olur, bkz. Muluk ve ark. (2009).
- Ana etkiler ve etkileşim etkileri sınanırken de Tekrarlar$\times$Etkiler hata terimi olarak kullanılır, bkz. Cochran & Cox (1957).
- Not edilmelidir ki, tekrar sayısı 1 olduğunda yukarıdaki tabloda, hatanın serbestlik derecesi "sıfır" olur.
- Bu durumda, normal Q-Q grafiği ya da kareler toplamlarının genel kareler toplamına oranlarına bakılarak ihmal edilebilir ya da önemsiz olduğu düşünülen faktöriyel etkiler belirlenir.

- Q-Q grafiğinde etkisi az olan ya da daha az önemli olan etkiler düz bir doğru etrafında yayılım gösterirken, önemli derecede etkiye sahip olan etki ya da etkiler bu doğrudan sapma gösterirler. Dolayısıyla, düz bir doğru etrafında yayılım gösteren etkiler hata terimi olarak alınırlar.
- Kareler toplamına bakarak, hangi etki ya da etkilerin hata terimi olarak alınacağına ilgili etkinin kareler toplamının, genel kareler toplamına bölümünden elde edilen oran yardımıyla karar verilir.
- Bu oran "açıklama oranı" olarak da isimlendirilir.
- Açıklama oranı düşük olan etki ya da etkiler hata terimi olarak alınırlar. Detaylı bilgi için bkz. Montgomery (2001).
- Bir tekrar olması ve B ana etkisinin Q-Q grafiğinde önemli bulunmaması halinde, ANOVA tablosu aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

Kaynak	df
Bloklar(AB)	1
A	1
Hata(B)	1
Genel	4-1=3

2^2 faktöriyel tasarımda, eğer A ana etkisinin AB etkileşim etkisine göre daha az önemli olduğu düşünülüyorsa, A ana etkisi bloklarla karıştırılır. Karıştırma işlemi yukarıdaki gibi yapılır. Bağıntı tablosunda A faktörüne karşılık gelen satır göz önüne alınır:

Etki	(1)	a	b	ab
A	-1	1	-1	1

A satırında "$+$" işaretli olan

$$a, \quad ab$$

deneme kombinasyonları birinci bloğa,
A satırında "$-$" işaretli olan

$$(1), \quad b$$

deneme kombinasyonları da ikinci bloğa alınır.

Sonuç olarak, aşağıdaki şekilde gösterilen iki blok elde edilir.

A

1. Blok	2. Blok
a	(1)
ab	b

Ana faktör etkilerine ve ikili etkileşimlere göre daha az önemsiz olduğu düşünülen ABC etkileşim etkisi, bloklarla karıştırıldığında her biri 4 büyüklüğünde iki blok elde edilir:

ABC

1. Blok	2. Blok
a	(1)
b	ab
c	ac
abc	bc

Hatırlatma:

Etki	(1)	a	b	ab	c	ac	bc	abc
ABC	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1

2^3 faktöriyel tasarımda, ABC etkileşim etkisinin bloklarla karıştırılması işleminin r kez uygulanması halinde, ANOVA tablosu, aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

Kaynak	df	SS
Bloklar	$2r-1$	SS_{Blok}
Tekrarlar	$r-1$	SS_{Tekrar}
ABC	1	SS_{ABC}
Tekrarlar×ABC	$r-1$	$SS_{Tekrar\times ABC}$
A	1	SS_A
B	1	SS_B
AB	1	SS_{AB}
C	1	SS_C
AC	1	SS_{AC}
BC	1	SS_{BC}
Hata	$6(r-1)$	SS_{Hata}
Genel	$8r-1$	SS_{Toplam}

Bir tekrar yapılması ve ikili etkileşim (AB, AC ve BC) etkilerinin Q-Q grafiğinde önemli bulunmaması halinde, ANOVA Tablosu aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

Kaynak	df
Bloklar(ABC)	1
A	1
B	1
C	1
Hata(AB+AC+BC)	3
Genel	8-1=7

- Eğer araştırmacı, etki karışımlı tasarımlarda olduğunun aksine, faktöriyel etkilerin hepsinden kısmi de olsa bir bilgi elde etmek istiyorsa, her tekrarda farklı bir etkiyi bloklarla karıştırmak suretiyle bu bilgiyi ilgili tekrarlardan elde eder. Bu nedenle, bu tip tasarımlara **kısmi etki karışımlı** (partially confounded) tasarımlar denir.
- Örneğin, 2^3 faktöriyel tasarımda, I. tekrarda ABC, II. tekrarda BC ve III. tekrarda AC etkileşim etkileri bloklarla karıştırılmış olsun.
- ABC hakkındaki bilgi II. ve III. tekrarlardan, BC hakkındaki bilgi I. ve III. tekrarlardan ve AC hakkındaki bilgi I. ve II. tekrarlardan elde edilir.
- Böylelikle, ABC, BC ve AC etkileşim etkileri hakkında tam bir bilgi kaybından kaçınılmış olur ve her bir etki hakkında 2/3 oranında bilgi elde edilmiş olur.

ANOVA tablosunda, tekrarlar için kareler toplamı,

$$SS_{Tekrar} = 2^3 \sum_{i=1}^{r} (\bar{T}_i - \bar{y}....)^2, \tag{84}$$

bloklar için kareler toplamı,

$$SS_{Blok} = 2^{3-1} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{2} (\bar{B}_{ij} - \bar{T}_i)^2, \tag{85}$$

ve faktöriyel etkiler için kareler toplamı,

$$SS_X = \frac{[\text{Bağıntı}_X]^2}{r2^3} \tag{86}$$

formülleri kullanılarak hesaplanır. Burada,
$\bar{T}_i$, $i-$inci tekrardaki gözlemlerin ortalamasını,
$\bar{B}_{ij}$, $i-$inci tekrardaki $j-$inci blok ortalamasını,

gösterir.

Not etmek gerekir ki, SS formülünde "Bağıntı" değeri hesaplanırken sadece ilgili tekrarlardan elde edilen gözlem değerleri kullanılır.
Kısmi etki karışımlı 2^3 faktöriyel tasarım için ANOVA tablosu, aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

Kaynak	df
Tekrarlar	$r-1$
Bloklar(Tekrarlar)	r
A	1
B	1
C	1
AB	1
AC (I. ve II. tekrardan)	1
BC (I. ve III. tekrardan)	1
ABC (II. ve III. tekrardan)	1
Hata	$6r-7$
Genel	$8r-1$

- Bazı durumlarda, deneme sayısı o kadar fazla olabilir ki, deneme sayısının yarı büyüklüğünde deney birimi içeren bloklar elde etmek dahi mümkün olmayabilir.
- Bu gibi durumlarda, ikinci bir faktöriyel etkiyi bloklarla karıştırarak, deneme sayısının dörtte biri büyüklüğünde dört farklı blok kullanmak suretiyle bu sorun giderilmeye çalışılır.
- Çift etki karışımında, iki ayrı faktöriyel etkiye ilaveten bu faktöriyel etkilerin etkileşimleri de bloklarla karışmış olacağından, toplam üç tane faktöriyel etki bloklarla karıştırılmış olur.
- Benzer şekilde, deneme sayısının sekizde biri büyüklüğünde sekiz ayrı blok kullanmak için üç ayrı faktöriyel etkiye ilaveten bu üç faktöriyel etkinin ikişerli ve üçerli etkileşimleri de bloklarla karıştırılmış olur.
- Faktöriyel tasarımlarda, çift etki karışımının nasıl yapıldığını bir örnek üzerinde açıklayalım.
- 2^3 faktöriyel tasarımda, ABC etkileşim etkisi bloklarla karıştırıldığında her biri dörder tane deney birimi içeren iki blok elde edilir.
- Pratikte, bu özelliğe sahip bloklar elde etmek çok zor olmamakla beraber, bu örnek için elimizde her biri ikişer tane deney birimi içeren dört blok olduğunu varsayalım.
- Bu durumda, önemsiz olduğu düşünülen BC faktöriyel etkisi de bloklarla karıştırılarak, dört olan blok büyüklükleri yarıya indirilir.

ABC etkileşim etkisi bloklarla karıştırıldıktan sonra elde edilen blokların her biri için BC etkileşim etkisi bloklarla karıştırılırken BC nin bağıntı katsayılarından yararlanılır.

Etki	(1)	a	b	ab	c	ac	bc	abc
BC	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1

dir. $Blok_1$ için BC etkileşim etkisi bloklarla karıştırılırken ,"$+$" işaretli olan deneme kombinasyonları

$$a, \quad abc$$

$Blok_{11}$ de ve "$-$" işaretli olan deneme kombinasyonları

$$b, \quad c$$

$Blok_{12}$ de yer alır.
Benzer şekilde $Blok_2$ için BC etkileşim etkisi bloklarla karıştırılırken, "$+$" işaretli olan deneme kombinasyonları

$$(1), \quad abc$$

$Blok_{21}$ de ve "$-$" işaretli olan deneme kombinasyonları

$$ab, \quad ac$$

$Blok_{22}$ de yer alır.

Çift Etki Karışımı

Sonuç olarak, her biri iki büyüklüğünde dört blok elde edilmiş olur:

ABC

$Blok_1$	$Blok_2$
a	(1)
b	ab
c	ac
abc	bc
BC	BC

$Blok_{11}$	$Blok_{12}$	$Blok_{21}$	$Blok_{22}$
a	b	(1)	ab
abc	c	abc	ac

Not edilmelidir ki, ABC ve BC nin etkileşim etkileri, bloklarla karıştırıldığında

$$(ABC)(BC) = AB^2C^2 = A \mod 2$$

ana etkisi de bloklarla karıştırılmış olur. Buradaki çarpma işlemi 2 modülüne göre yapılmıştır.

Kesirli Faktöriyel Tasarımlar

- Eldeki kaynaklar yeterli olmadığında veya yüksek dereceli etkileşimlerin önemli olmadığı varsayıldığında, araştırmacılar tam tekrar yapmak yerine, yarı (1/2) tekrar, dörtte bir (1/4) tekrar . . . v.b. yapmak isteyebilirler.
- Bu durumda, en uygun yöntem denemelerin yalnız bir kısmını kullanan **kesirli faktöriyel tasarımlardır** (fractional factorial designs).
- Böylelikle, ana etkiler ile düşük dereceli etkileşimler hakkında bilgi elde etmenin yanısıra, deneyde kullanılan deney birimi sayısı, dolayısıyla da, harcanan para ve zamandan da tasarruf edilmiş olur.
- Kesirli faktöriyel tasarımlar, özellikle mühendislik alanında yaygın olarak kullanılır. Bunun başlıca sebebi, deneyin başlangıç safhalarında faktöriyel etkiler hakkında önemli bilgiler vermesi (Kuehl, 2000), dolayısıyla da, çalışmanın ilerleyen safhaları için daha sağlıklı kararlar alınabilmesini kolaylaştırmasıdır.
- 2^7 tasarımda toplam 128 tane deneme vardır. 128 tane deney birimi içeren bir blok yerine, 64 tane deney birimi içeren iki bloktan rasgele olarak birini kullanmak (1/2 tekrar) ya da 32 tane deney birimi içeren dört bloktan rasgele olarak birini kullanmak (1/4 tekrar) bir çok açıdan tam tekrar yapmaya göre avantaj sağlar.

- Örneğin, 2^7 faktöriyel tasarımda, 64 tane deney birimi içeren iki bloğun kullanıldığını ve yüksek dereceli etkileşimlerin ihmal edilebilir olduğunu varsayarsak, hataya ait serbestlik derecesi,

$$\begin{aligned} df_{Hata} &= df_{Toplam} - (df_{Blok} + df_{\text{Ana Etkiler}} + df_{\text{İkili Etkileşimler}}) \\ &= 127 - (1 + 7 + 21) \\ &= 98 \end{aligned}$$

olur. Üçlü etkileşimlerin de önemli olduğu düşünülüyorsa hataya ait serbestlik derecesi

$$\begin{aligned} df_{Hata} &= df_{Toplam} - (df_{Blok} + df_{\text{Ana Etkiler}} + df_{\text{İkili Etkileşimler}} + df_{\text{Üçlü Etkileşimler}}) \\ &= 127 - (1 + 7 + 21 + 35) \\ &= 63 \end{aligned}$$

olur.

- Bu serbestlik dereceleri hata için gerekenden çok fazladır ve gereksiz yere kaynak israfına neden olur.
- Dolayısıyla, faktöriyel tasarımda, 1/2 tekrar yaparak, 64 tane deney birimi içeren bloklardan birini rasgele olarak kullanmak bizim için yeterli olabilir.
- 2^6 ve 2^8 tasarımları içinde benzer yorumlar yapılabilir, bkz. Montgomery (2001) ve Hinkelmann & Kempthorne (1994).
- Literatürde, 2^k faktöriyel tasarımın $1/2^x$ $(x = 1, 2, \cdots, k-1)$ tekrarı, 2^{k-x} olarak ifade edilir.

- Etki karışımında olduğu gibi etkisi bloklarla karıştırılacak olan faktöriyel etkiler belirlenir.
- Bu faktöriyel etkiler **tanımlayıcı bağıntı** (defining contrast) olarak ifade edilir ve I sembolü ile gösterilir.
- Yüksek dereceli etkileşimler genellikle önemsiz olarak kabul edildiğinden kesirli faktöriyel tasarımlarda tanımlayıcı bağıntı olarak alınırlar.
- 2^3 faktöriyel tasarımda, tanımlayıcı bağıntı $I = ABC$ etkileşim etkisi olsun.
- 1/2 tekrar ile amaç, 8 deneme kombinasyonu yerine 4 deneme kombinasyonu ile çalışmaktır.
- 8 deneme kombinasyonu, etki karışımında olduğu gibi, bağıntı katsayıları tablosunundan yaralanılarak her biri 4 tane deney birimi içeren iki bloğa ayrılır.
- $I = ABC$ olduğu durumda, 2^3 faktöriyel tasarımda "+" işaretli olan deneme kombinasyonları
$$a, \quad b, \quad c, \quad abc$$
dır.
- Dolayısıyla, 2^3 faktöriyel tasarımın 1/2 tekrarında kullanılacak olan deneme kombinasyonları
$$a, \quad b, \quad c, \quad abc$$
olarak belirlenirler.

Aşağıda, 2^3 faktöriyel tasarımın bağıntı katsayıları tablosu yeniden verilmiştir.

Etki	(1)	a	b	ab	c	ac	bc	abc
A	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
B	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
AB	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
C	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
AC	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
BC	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
ABC	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1

Bu tablo ve a, b, c, abc deneme kombinasyonları kullanılarak ana etkiler ile etkileşim etkileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$A = \frac{1}{2}[a - b - c + abc] \quad (87)$$

$$B = \frac{1}{2}[-a + b - c + abc] \quad (88)$$

$$AB = \frac{1}{2}[-a - b + c + abc] \quad (89)$$

$$C = \frac{1}{2}[-a - b + c + abc] \quad (90)$$

$$BC = \frac{1}{2}[a - b - c + abc] \quad (91)$$

$$AC = \frac{1}{2}[-a + b - c + abc] \quad (92)$$

- 2^3 faktöriyel tasarımda 1/2 tekrar kullanılarak elde edilen bu eşitliklerde dikkat çekici nokta şudur:
- A ana etkisi ile BC etkileşim etkisi, B ana etkisi ile AC etkileşim etkisi, C ana etkisi ile AB etkileşim etkisi aynı bağıntı kullanılarak tahmin edilir.
- Bu özellik, A ve BC nin, B ve AC nin, C ve AB nin **eşdeş** (alias) olduğunu gösterir.
- Açıktır ki, kesirli faktöriyel tasarımlarda yüksek dereceli etkileşimlerin etkileri bloklarla karıştırıldığı gibi eşdeş olarak adlandırılan faktör etkileri de birbirleriyle karıştırılmış olur.

- Eşdeşleri bulmanın bir yolu, bağıntı katsayıları tablosundan yararlanmaktır.
- Dikkat edilirse A ve ABC ye karşılık gelen satırlardaki işaretlerin çarpımları, BC ye karışılık gelen satırdaki işaretleri verir. (Benzer durum B ile AC ve C ile AB için de geçerlidir.). Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} A &= BC \\ B &= AC \\ C &= AB \end{aligned}$$

eşdeştirler.

- Eşdeşleri bulmanın diğer ve daha kolay yolu, faktör ve tanımlayıcı bağıntıyı 2 modülüne göre çarpmaktır. Aynı örnek için,

$$\begin{aligned} A(ABC) &= A^2BC = BC \quad \mod 2 \\ B(ABC) &= AB^2C = AC \quad \mod 2 \\ C(ABC) &= ABC^2 = AB \quad \mod 2 \end{aligned}$$

dir. Bu durum genel olarak

$$\text{faktör} \times I = \text{eşdeş} \tag{93}$$

şeklinde ifade edilir.

- 2^3 faktöriyel tasarımın 1/2 tekrarı bir anlamda a, b, c, abc deneme kombinasyonlarına sahip 2^2 faktöriyel tasarıma dönüşmüştür. Bu deneme kombinasyonları kullanılarak ana etkiler ve etkileşim etkileri (87)-(92) eşitlikleri yardımıyla hesaplanır. Kareler toplamları ise

$$SS_A = \frac{1}{n2^2}[\text{Bağıntı}_A]^2 \quad (94)$$

$$SS_B = \frac{1}{n2^2}[\text{Bağıntı}_B]^2 \quad (95)$$

$$SS_C = \frac{1}{n2^2}[\text{Bağıntı}_C]^2 \quad (96)$$

  dır.
- Bu durum, $A, B, C, D, \cdots, J$ ve K faktörlerine sahip 2^k faktöriyel tasarım için aşağıdaki gibi genelleştirilir:

- Tanımlayıcı bağıntı, $ABC \cdots K$ etkileşim etkisi olmak üzere, eşdeşler

$$\begin{aligned}
A(ABC\cdots K) &= BC\cdots K \\
B(ABC\cdots K) &= AC\cdots K \\
C(ABC\cdots K) &= AB\cdots K \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
AB(ABC\cdots K) &= C\cdots K \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
ABC(ABCD\cdots K) &= D\cdots K \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
ABC\cdots J(ABC\cdots JK) &= K
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Kareler toplamları ise

$$SS_X = \frac{1}{n2^{k-1}}\left[\text{Bağıntı}_X\right]^2 \tag{97}$$

dir. Burada X, 2^k faktöriyel tasarımda kullanılan faktörleri veya faktör etkileşimlerini göstermektedir.