1. FONKSİYON DİZİLERİNİN NOKTASAL VE DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI

Tanım 1. (Fonksiyon Dizileri) $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, A üzerinde tanımlı, reel değerli bütün fonksiyonların kümesi $F(A)$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} s &: \mathbb{N} \to F(A) \\ &: n \to s(n) = f_n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi denir ve $s = (f_n)$ ile gösterilir.

Tanım 2. (Noktasal Yakınsaklık) $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon dizisi olsun. A kümesi üzerinde (f_n) fonksiyon dizisinin bir $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in A$ için $\exists\ n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ vardır öyle ki $\forall\ n > n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olmasıdır. Bu durumda, A üzerinde $f_n \to f$ (noktasal) veya sadece $f_n \to f$ yazılır. Hatta her $x \in A$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ yazılır. Bu durumda her $x \in A$ için $(f_n(x))$ dizisi yakınsaktır.

Örnek 1. $[0,1]$ aralığı üzerinde $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ şeklinde tanımlanan (f_n) dizisi, $f(x) = 0$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna

noktasal yakınsak mıdır ? Gösteriniz.

Çözüm. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin ve $x \in [0,1]$ olsun. Her $x \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{x^n}{n} - 0 \right| \\ &= \left| \frac{x^n}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

olur. O halde $n_0 = \dfrac{1}{\varepsilon}$ seçilirse, her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in [0,1]$ için $\exists\ n_0 = \dfrac{1}{\varepsilon}$ vardır öyle ki her $n > n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} = \varepsilon$ gerçeklenir. Dolayısıyla $[0,1]$ aralığı üzerinde $f_n \to f$ sağlanır.

Örnek 2. $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ ile tanımlı fonksiyon dizisinin $I = [0,1]$ aralığı üzerinde $f(x) = 0$ ile tanımlı fonksiyona noktasal yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm. I. Yol

Her $x \in [0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx} = 0 = f(x)$$

olduğundan $f_n \to f = 0$ gerçeklenir.

II. Yol

$\varepsilon > 0$ alalım. Her $x \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left|\frac{x}{1+nx} - 0\right| \\ &= \frac{x}{1+nx} < \varepsilon \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+nx} - \varepsilon &< 0 \\ \frac{x-\varepsilon-\varepsilon nx}{1+nx} &< 0 \\ x-\varepsilon &< \varepsilon nx \\ \frac{x-\varepsilon}{\varepsilon x} &< n,\ x \neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, Her $x \in (0,1]$ için $n_0 = \dfrac{x-\varepsilon}{\varepsilon x}$ seçilirse, her $\varepsilon > 0$ ve her $n > n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ gerçeklenir. $x = 0$ için ise $(f_n(0)) = (0,0,...,0,..)$ olup her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(0) - 0| < \varepsilon$ gerçeklendiğinden, $[0,1]$ üzerinde (f_n) fonksiyon dizisi, $f(x) = 0$ şeklinde tanımlı fonksiyona noktasal yakınsaktır.

Örnek 3. $f_n : [-1,0] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ şeklinde tanımlanan (f_n) fonksiyon dizisi noktasal yakınsak mıdır ?

Çözüm. Her $x \in (-1,0]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

$x = -1$ için $(f_n(-1)) = ((-1)^n) = (-1,1,-1,1,...)$ olup bu dizi yakınsak değildir.

$\lim_{n\to\infty} f_n(-1)$ mevcut olmadığından $[-1,0]$ kümesi üzerinde (f_n) fonksiyon dizisi noktasal yakınsak olamaz.

Tanım 3. (Düzgün Yakınsaklık)

$A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f_n : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon dizisi olsun. (f_n) dizisinin, A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ ve her $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ gerçeklenmesidir. (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise $f_n \rightrightarrows f$ şeklinde gösterilir. A kümesi üzerinde düzgün yakınsak olan bir fonksiyon dizisi aynı küme üzerinde noktasal yakınsaktır fakat bu önermenin tersi doğru değildir.

Örnek 4. $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^3}$ ile tanımlı fonksiyon dizisi, $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır ? Gösteriniz.

Çözüm. Her $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^3} - 0\right| = \frac{|\cos nx|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3} < \varepsilon$$

olup gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$n > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$$

bulunur. $n_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$ seçilirse her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için her $n > n_0 = n_0(\varepsilon)$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ gerçeklenir. O halde $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n \rightrightarrows f = 0$ (düzgün) elde edilir.

Theorem 1. $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ olsun. (f_n) fonksiyon dizisinin, A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olaması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$ olmasıdır.

Örnek 5. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = 3x + \dfrac{7}{n^2}$ bağıntısıyla verilen fonksiyon dizisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır ? İnceleyiniz.

Çözüm. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(3x + \frac{7}{n^2}\right) = 3x = f(x)$$

olup $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n \to f$ (noktasal) gerçeklenir. Theorem 1 gereğince,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| 3x + \frac{7}{n^2} - 3x \right| = \frac{7}{n^2}$$

olup

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^2} = 0$$

olduğundan $\mathbb{R}$ üzerinde yakınsama düzgündür.

Örenk 6. $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ ile tanımlı fonksiyon dizisi, $I = [0,1]$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır ? Gösteriniz.

Çözüm. Her $x \in [0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = 0 = f(x)$$

olup $[0,1]$ üzerinde $f_n \to f = 0$ (noktasal) gerçeklenir.

Theorem 1 kullanılarak

$$\begin{aligned} c_n &= \underset{x\in[0,1]}{maks} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \underset{x\in[0,1]}{maks} \left| \frac{2nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| \\ &= \underset{x\in[0,1]}{maks} \left\{ \frac{2nx}{1+n^2x^2} \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. $g(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ olmak üzere . c_n ifadesini bulmak için $g(x)$ fonksiyonunun birinci türevine bakılmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2n(1+n^2x^2) - 2nx(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} \\ &= \frac{2n - 2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} \end{aligned}$$

bulunur. $g'(x) = 0$ için $x = \dfrac{1}{n} \in [0,1]$ olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$c_n = maks\left\{g(0), g(1), g\left(\frac{1}{n}\right)\right\} = maks\left\{0, \frac{2n}{1+n^2}, 1\right\} = 1$$

olup

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1$$

bulunur. Bu ise teorem gereğince verilen fonksiyon dizisinin I kümesi üzerinde düzgün yakınsak olmadığını gösterir.

Sonuç 1. (f_k) dizisi bir A üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir $\Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ ve (f_k) dizisinin bir (f_{n_k}) altdizisi ile terimleri A kümesinden alınan bir (x_k) dizisi vardır ki öyleki

$$|f_{nk}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon$$

gerçeklenir.

Örenk 7. $f_n(x) = \left(\dfrac{x}{n}\right)$ dizisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır ?

Çözüm. Her $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0 = f(x)$$

olup$f_n \to f$ (noktasal) sağlanır. $n_k = k$ ve $x_k = k$ olsun. $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ seçilirse, $f_{n_k}(x) = f_n(x)$ olup Sonuç 1 gereğince

$$|f_{nk}(x_k) - f(x_k)| = |f_k(k) - 0| = \left|\frac{k}{k} - 0\right| = 1 > \frac{1}{2}$$

olduğundan yakınsama düzgün değildir.