## 5. FONKSİYON SERİLERİNİN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI, İNTEGRAL VE TÜREV İLİŞKİSİ

**Teorem 1.** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonların bir serisi olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi düzgün yakınsak ise

$$\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

gerçeklenir.

**Örnek 1.** $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x)^n}$ şeklinde tanımlı olsun. O halde

$$\int_1^2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^2 f_n(x)\, dx$$

eşitliği gerçeklenir mi ?

**Çözüm.** Her $n$ için $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x)^n}$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar $[1,2]$ aralığında integrallenebilirdir.

Şimdi, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{(1+x)^n}$ serisini düzgün yakınsaklığını inceleyelim.

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(1+x)^k} \\ &= x \left[ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+x)^n} \right] \\ &= \frac{x}{1+x} \left[ 1 + \frac{1}{1+x} + \ldots + \frac{1}{(1+x)^{n-1}} \right] \\ &= \frac{x}{1+x} \left[ \frac{1 - \frac{1}{(1+x)^n}}{1 - \frac{1}{1+x}} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{(1+x)^n} \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(1+x)^n}\right)=1$$

olup $(s_n)$ dizisi, $s(x)=1$ ile tanımlı fonksiyona noktasal yakınsaktır.

$$\begin{aligned} c_n &= \underset{x\in[1,2]}{maks}\left|1-\frac{1}{(1+x)^n}-1\right| \\ &= \underset{x\in[1,2]}{maks}\frac{1}{(1+x)^n} \\ &= \frac{1}{2^n}\to 0, \quad n\to\infty \end{aligned}$$

olup $s_n \rightrightarrows s=1$ (*düzgün*) gerçeklenir. O halde, $[1,2]$ üzerinde $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}$ serisi düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla **Teorem-1** gereğince eşitlik gerçeklenir ve

$$\int_1^2\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_1^2 f_n(x)\,dx$$

sağlanır.

**Teorem 2.** Her $n$ için $f_n$ fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde türevlenebilir olsun. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi bir $f$ fonksiyonuna noktasal yakınsak ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ serisi bir $g$ fonksiyonuna düzgün yakınsak ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi $[a,b]$ üzerinde düzgün yakınsaktır ve

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

gerçeklenir.

**Örnek 2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ serisinin $[0,1]$ aralığı üzerinde terimterime türevi alınabilir mi?

**Çözüm.**

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \\ &= \left(x-\frac{x^2}{2}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \\ &= x-\frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x=s(x)$$

olup $(s_n)$ dizisi, $s(x)=x$ ile tanımlı fonksiyona noktasal yakınsaktır.

$$\begin{aligned} c_n &= \underset{x\in[0,1]}{maks}\left|x-\frac{x^{n+1}}{n+1}-x\right| \\ &= \underset{x\in[0,1]}{maks}\left|-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \\ &= \underset{x\in[0,1]}{maks}\left\{\frac{x^{n+1}}{n+1}\right\} \\ &= \frac{1}{n+1}\to 0, \quad n\to\infty \end{aligned}$$

olup $s_n \rightrightarrows s$ $(düzgün)$ gerçeklenir.

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'$$

Eşitliğinin gerçeklenip gerçeklenmediğini göstermek için eşitliğin sol tarafındaki ifade için

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right]'=(x)'=1 \qquad (*)$$

yazılır. Sağ kısmı için ise

$f_n(x) = \dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ olup $f_n'(x) = x^{n-1} - x^n$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^{n-1}-x^n\right) &= (1-x)+\left(x-x^2\right)+\ldots+\left(x^{n-1}-x^n\right)\\ &= 1-x^n\end{aligned}$$

olup

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(x^{k-1}-x^k\right) = \lim_{n\to\infty}(1-x^n) = \begin{cases} 1 \ , & 0 \le x < 1 \\ 0 \ , & x = 1 \end{cases} \qquad (**)$$

bulunur. Sonuç olarak $(*) \neq (**)$ elde edilir. Dolayısıyla, verilen seri bu aralıkta terim terime türevlenemez.

**Abel Testi. 1)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $A$ üzerinde düzgün yakınsak

**2)** $(g_n)$, $A$ üzerinde negatif olmayan, azalan (n'ye göre) ve düzgün sınırlı

şartlarını sağlıyorsa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ serisi, $A$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

**Örnek 3.** $c \in (0,1)$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n(1+x^n)}{n}$ serisi, $[0,c]$ aralığında düzgün yakınsak mıdır ?

**Çözüm.**

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}, \quad g_n(x) = 1 + x^n$$

olarak alınsın.

**1)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ serisi $[0,c]$ üzerinde düzgün yakınsakdır. Gerçekten

Her $x \in [0,c]$ için

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{x^n}{n} = \frac{c^n}{n} = a_n$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{c^{n+1}}{n+1}\frac{n}{c^n} = c < 1$$

olup, oran testinden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n}$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla, $[0,c]$ üzerinde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1+x^n)}{n}$ serisi Weierstrass testinden düzgün yakınsaktır.

**2)** Her $x \in [0,c]$ için $g_n(x) = 1 + x^n > 0$ olup, her $n$ için $(g_n)$ dizisi negatif olmayan fonksiyonların bir dizisidir.

Her $x \in [0,c]$ için $g_n(x) = 1 + x^n > 1 + x^{n+1} = g_{n+1}(x)$ olduğundan $(g_n)$ azalandır.

Her $x \in [0,c]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|g_n(x)| = |1 + x^n| \leq 1 + c^n < 2$$

olduğundan $(g_n)$ düzgün sınırlıdır.

O halde Abel testi gereğince, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1+x^n)}{n}$ serisi $[0,c]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

**Örnek 4.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3} x^n$ serisi $(0,1)$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır ?

**Çözüm.**

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^3}, \quad g_n(x) = x^n$$

olsun.

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ serisi $(0,1)$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Gerçekten

Her $x \in (0,1)$ için

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3} = a_n$$

ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ harmonik serisi yakınsak olduğundan, Weierstrass testi gereğince $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ serisi $(0,1)$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

**2)** Her $x \in (0,1)$ için $g_n(x) = x^n > 0$ olup, her $n$ için $(g_n)$, negatif olmayan fonksiyonların bir dizisidir.

Her $x \in (0,1)$ için $g_n(x) = x^n > x^{n+1} = g_{n+1}(x)$ olup $(g_n)$ azalan bir dizidir.

Her $x \in (0,1)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$g_n(x) = |x^n| < 1$$

olduğundan $(g_n)$ düzgün sınırlıdır.

O halde Abel testi gereğince, verilen seri $(0,1)$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

**Dirichlet Testi: 1)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi düzgün sınırlı

**2)** $(g_n)$, $A$ üzerinde negatif olmayan, azalan ve $g_n \rightrightarrows 0$

şartları sağlanıyorsa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ serisi, $A$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

**Örnek 5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n(1-x)}{\log(n+1)}$ serisinin $[0,1)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Dirichlet testini kullanalım.

$$f_n(x) = x^n(1-x), \quad g_n(x) = \frac{1}{\log(n+1)}$$

olsun.

**1)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ serisinin kısmi toplamlar dizisini bulalım.

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} x^k(1-x) \\
&= x(1-x) + x^2(1-x) + \ldots + x^n(1-x) \\
&= x(1-x)\left[1 + x + \ldots + x^{n-1}\right] \\
&= x(1-x)\frac{1-x^n}{1-x} \\
&= x(1-x^n)
\end{aligned}$$

olup her $x \in [0,1)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|s_n(x)| = |x(1-x^n)| \leq 1$$

olduğundan $(s_n)$ düzgün sınırlıdır.

**2)** $(g_n)$ dizisi, her $n$ için negatif olmayan fonksiyonların bir dizisidir.

Her $x \in [0,1)$ için

$$g_n(x) = \frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{\log(n+2)} = g_{n+1}(x)$$

olduğundan $(g_n)$ azalan fonksiyondur.

$g_n(x) = \dfrac{1}{\log(n+1)}$ dizisi, $g = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak mıdır ?

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0 = g(x)$$

olduğundan $(g_n)$ dizisi, $g = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. $(g_n)$ , $x$' ten bağımsız olduğundan yakınsama düzgündür.

O halde, Dirichlet testi gereğince verilen seri $[0,1)$ üzerinde düzgün yakınsaktır.