6. KUVVET SERİLERİNİN TÜREV VE İNTEGRALİ

Tanım 1. $c_k \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

şeklindeki serilere kuvvet serileri denir. c_k reel sayılarına serinin katsayıları denir.

Teorem 1. (Cauchy-Hadamard Teoremi):

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ kuvvet serisi verilsin ve $L = \overline{\lim} \sqrt[k]{|c_k|}$ olsun. Bu durumda kuvvet serisi

1) $|x-a|\, L < 1$ olan x değerleri için yakınsaktır.

2) $|x-a|\, L > 1$ olan x değerleri için ıraksaktır.

Yakınsaklık yarıçapı $R = \dfrac{1}{L}$ olmak üzere, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ kuvvet serisi için

1) $L \neq 0 \Rightarrow R = \dfrac{1}{L}$ olup $|x-a| < R$ için seri yakınsak

2) $L = 0 \Rightarrow R = \infty$ olup, seri her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsak

3) $L = \infty \Rightarrow R = 0$ olup seri sadece $x = a$ noktasında yakınsaktır.

Not: $L = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left| \dfrac{c_{k+1}}{c_k} \right|$ limiti varsa $L = \overline{\lim} \sqrt[k]{|c_k|}$ limiti de vardır. Kolaylık açısından soruların çözümünde ilk limit kullanılabilir.

Örnek 1. Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçaplarını ve yakınsaklık aralıklarını bulunuz.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k(x-1)^k$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}$

Çözüm. a) $c_k = k$ olmak üzere

$$L = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k} = \lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{k}}$$

limitini hesaplayalım.

$$\lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{k}} = s$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\ln \lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{k}} &= \ln s \\
\lim_{k\to\infty} \ln k^{\frac{1}{k}} &= \ln s \\
\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln k &= \ln s \\
\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} &= \ln s \\
0 &= \ln s \\
s &= 1
\end{aligned}$$

bulunur. Yani, $L = 1$ dolayısıyla da $R = \dfrac{1}{L} = 1$ olarak elde edilir. Bu seri Cauchy-Hadamard Teoreminden, $|x-1| < 1$ koşulunu sağlayan x değerleri için yakınsaktır. Buradan

$$-1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

olup $(0, 2)$ aralığı yakınsaklık aralığıdır.

b) $c_k = \dfrac{1}{k!}$ olmak üzere

$$L = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}}$$

limitini hesaplamak zor olduğundan $L = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left| \dfrac{c_{k+1}}{c_k} \right|$ limitini kullanalım. Buradan

$$L = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \frac{1}{(k+1)!} . k! \right| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{k+1} = 0$$

bulunur. $L = 0$ olduğundan $R = \dfrac{1}{L} = \infty$ olarak elde edilir. Verilen seri her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır.

Örnek 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm. Cauchy-Hadamard testi kullanılırsa, $c_n = \frac{x^n}{3^n n}$ olmak üzere

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{x^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}.3^n n \right| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n}{3n+3} = \frac{1}{3}$$

olup $L = \frac{1}{3}$ ve $R = 3$ bulunur. Verilen seri $|x| < 3$ için yakınsaktır.

$$x = 3 \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

olup bu seri ıraksaktır.

$$x = -3 \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

serisi Alterne seri olup Leibnitz testinden yakınsaktır.

O halde yakınsaklık aralığı $[-3, 3)$ aralığıdır.

Örnek 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\sqrt{n})^n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm. Cauchy-Hadamard kullanabiliriz. $c_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = n^{-\frac{n}{2}}$ olmak üzere

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

olup $L = 0$ ve $R = \infty$ bulunur. Dolayısıyla, verilen seri her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır.