8. ORTOGONAL VE ORTONORMAL FONKSİYONLAR SİSTEMİ

Tanım 1. (Düzgün Süreksizlik Noktası): f fonksiyonunun x_0 noktasında sağ ve sol limitleri sonlu değerler olup, bu iki limit birbirinden farklı ise x_0 bir düzgün süreksizlik noktasıdır denir. Burada sağ ve sol limitler sırasıyla aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} f\left(x_0^+\right) &= \lim_{\varepsilon\to 0} f\left(x_0+\varepsilon\right) \\ f\left(x_0^-\right) &= \lim_{\varepsilon\to 0} f\left(x_0-\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Tanım 2. (Parçalı Sürekli Fonksiyon): $[a,b]$ aralığında,f fonksiyonu sonlu sayıda düzgün süreksizlik noktası dışında sürekli ise f fonksiyonu parçalı süreklidir denir.

Örnek 1. Aşağıda verilen fonksiyonların verilen aralıkta parçalı sürekli olup olmadıklarını belirtiniz. Varsa, düzgün süreksizlik noktasındaki sağ ve sol limitleri bulunuz.

a) $f(x)=\begin{cases} 2 & , \quad 0\le x<1 \\ x^2 & , \quad 1<x\le 2 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} 1-x & , \quad 1\le x<2 \\ \frac{x}{x-2} & , \quad 2<x\le 3 \end{cases}$

Çözüm.

a) Aralık $[0,2]$, $x_0=1\in[0,2]$ kritik nokta olmak üzere

$$\begin{aligned} f\left(1^+\right) &= \lim_{\varepsilon\to 0} f\left(1+\varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(1+\varepsilon\right)^2 = 1 \\ f\left(1^-\right) &= \lim_{\varepsilon\to 0} f\left(1-\varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} 2 = 2 \end{aligned}$$

bulunur. Burada $f(1^+)\neq f(1^-)$ olduğundan $x_0=1$ düzgün süreksizlik noktasıdır. $[0,2]$ aralığında düzgün süreksizlik nokta sayısı 1 olup sonlu olduğundan f fonksiyonu $[0,2]$ aralığında parçalı süreklidir.

b) Aralık $[1,3]$, $x_0=2\in[1,3]$ kritik nokta olmak üzere

$$\begin{aligned} f\left(2^+\right) &= \lim_{\varepsilon\to 0} f\left(2+\varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2+\varepsilon}{2+\varepsilon-2} = \frac{2}{0} = \infty \\ f\left(2^-\right) &= \lim_{\varepsilon\to 0} f\left(2-\varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(1+\varepsilon-2\right) = -1 \end{aligned}$$

olup $f\left(2^{+}\right)$ sonlu olmadığından $x_0 = 2$ bir düzgün süreksizlik noktası değildir. Dolayısıyla, f fonksiyonu $[1, 3]$ aralığında parçalı sürekli değildir.

Tanım 3. (Çift Fonksiyon): Simetrik aralıkta tanımlı bir f fonksiyonu tanım kümesindeki her x için $f(-x) = f(x)$ şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna çift fonksiyondur denir. Grafiği y eksenine göre simetriktir.

Tanım 4. (Tek Fonksiyon): Simetrik aralıkta tanımlı bir f fonksiyonu tanım kümesindeki her x için $f(-x) = -f(x)$ şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna tek fonksiyondur denir. Grafiği orjine göre simetriktir.

Örnek 2. Simetrik küme üzerinde tanımlı aşağıdaki fonksiyonların teklik ve çiftlik durumlarını inceleyiniz.

a) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ **b)** $f(x) = e^{x^2}$ **c)** $f(x) = x^2 \sin x$

Çözüm.

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 + 2x^2 + x \\ f(-x) &= -3x^3 + 2x^2 - x \end{aligned}$$

olup ne tek ne çift fonksiyondur.

b)

$$f(x) = e^{x^2} = f(-x)$$

olduğundan çift fonksiyondur.

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \sin x \\ f(-x) &= -x^2 \sin x \end{aligned}$$

olup $f(-x) = -f(x)$ olduğundan tek fonksiyondur.

Tanım 5. (Periyodik Fonksiyon): f, $[a,b]$ aralığında parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x+p) = f(x)$ olacak biçimde $p \neq 0 \in \mathbb{R}$ varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, p değerine de peryot denir. $f(x+kp) = f(x)$, $k \in \mathbb{Z}$ pozitif p periyotları arasında bir en küçüğü varsa buna asıl peryot denir.

Örnek 3. Aşağıdaki fonksiyonların periyodikliklerini inceleyiniz ve periyodik olanların asıl peryotlarını bulunuz.

a) $f(x) = \sin 3x$ **b)** $f(x) = x \cos x$

Çözüm.

a) Her x için $f(x+p) = f(x)$ olacak şekilde $p \neq 0 \in \mathbb{R}$ sayısını arıyoruz.

$$f(x+p) = \sin 3(x+p) = \sin(3x+3p) = \sin 3x$$

ve

$$\sin(3x+3p) = \sin 3x \cos 3p + \cos 3x \sin 3p$$

olup

$$\begin{aligned} \cos 3p &= 1 \\ \sin 3p &= 0 \end{aligned}$$

şartlarını sağlayan p

$$\begin{aligned} 3p &= 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ p &= \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada $k=1$ için $p = \dfrac{2\pi}{3}$ asıl peryottur.

b) Her x için

$$f\left(x+p\right)=\left(x+p\right)\cos\left(x+p\right)=x\cos x$$

ve

$$\begin{aligned}\left(x+p\right)\left(\cos x\cos p-\sin x\sin p\right) &= x\cos x\\ x\cos x\cos p+p\cos x\cos p-\left(x+p\right)\sin x\sin p &= x\cos x\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}\cos p &= 1\\ \cos p &= 0\end{aligned}$$

olacak biçimde p bulunmadığından $f\left(x\right)$ periyodik fonksiyon değildir.

Tanım 6. (Ortogonal Fonksiyon): Bir $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların bir dizisi $\{\phi_n\left(x\right)\}$ olsun. Her $x\in[a,b]$ için $q\left(x\right)>0$ olan bir fonksiyon olmak üzere

$$\left(\phi_n,\phi_m\right)=\int\limits_a^b\phi_n\left(x\right)\phi_m\left(x\right)q\left(x\right)dx=0,\ \ (m\neq n)$$

ise $\{\phi_n\left(x\right)\}$ fonksiyon dizisi $[a,b]$ aralığında q fonksiyonuna göre ortogonaldir denir. Eğer

$$\int\limits_a^b\phi_n\left(x\right)\phi_m\left(x\right)q\left(x\right)dx=1,\ \ (m=n)$$

ise $\{\phi_n\left(x\right)\}$ fonksiyon dizisi $[a,b]$ aralığında q fonksiyonuna göre ortonormaldir denir.

Burada $\{\phi_n\}$ ortogonal sisteminin normu

$$\|\phi_n\|=\left(\int\limits_a^b\phi_n^2\left(x\right)q\left(x\right)dx\right)^{\dfrac{1}{2}}$$

şeklindedir.

Örnek 4. $\{\phi_n(x)\} = \{2\cos nx + 3\sin 5nx\}$ fonksiyon dizisi, $[-\pi,\pi]$ aralığında $q(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal midir ? Gösteriniz. Karşılık gelen ortonormal sistemi bulunuz.

Çözüm.

$$
\begin{aligned}
(\phi_n,\phi_m) &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x)\,\phi_m(x)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (2\cos nx + 3\sin 5x)(2\cos mx + 3\sin 5mx)\,dx \\
&= 8\int_{0}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + 18\int_{0}^{\pi} \sin 5nx \sin 5mx dx \\
&= 4\int_{0}^{\pi} \{\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\}\,dx \\
&\quad +9\int_{0}^{\pi} \{\cos 5(n-m)x - \cos 5(n+m)x\}\,dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olup $\{\phi_n(x)\}$ fonksiyon dizisi, $[-\pi,\pi]$ aralığında $q(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Şimdi normunu bulalım.

$$
\begin{aligned}
\|\phi_n\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_n^2(x)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (2\cos nx + 3\sin 5nx)^2\,dx \\
&= 8\int_{0}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} dx + 18\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 10nx}{2} dx \\
&= 13\pi
\end{aligned}
$$

olup buradan $\|\phi_n\| = \sqrt{13\pi}$ olarak bulunur. Dolayısıyla verilen sistem

$$(\phi_n, \phi_m) = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \sqrt{13\pi} & , \quad m = n \end{cases}$$

şeklindedir. Karşılık gelen ortonormal sistem her bir elemanın norma yani $\sqrt{13\pi}$' ye bölünmesiyle elde edilir. Yani,

$$\left\{ \frac{2}{\sqrt{13\pi}} \cos nx + \frac{3}{\sqrt{13\pi}} \sin 5nx \right\}$$

olarak elde edilir.