11. KOMPLEKS FOURİER SERİLERİ

Tanım 1.

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \qquad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun kompleks formdaki Fourier açılımı ve katsayıları sırasıyla

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx$$

şeklindedir.

Örnek 1. $(-\pi, \pi)$ aralığında $f(x) = e^x$ olarak verilen fonksiyonun kompleks Fourier serisini bulunuz.

Çözüm. Önce c_n katsayısını bulalım.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx \\ &= \frac{(1+in)}{2\pi(1+n^2)} \left(e^{\pi} e^{-in\pi} - e^{-\pi} e^{in\pi}\right) \end{aligned}$$

olup

$$e^{\mp in\pi} = (-1)^n$$

ve

$$\sinh \pi = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$$

olduğundan

$$c_n = \frac{(1+in)}{\pi\left(1+n^2\right)}\left(-1\right)^n \sinh\pi$$

bulunur. Dolayısıyla istenilen kompleks Fourier serisi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \\ &= \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+in)}{(1+n^2)}\left(-1\right)^n e^{inx} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

fonksiyonunun kompleks Fourier serisine açınız.

Çözüm. Önce c_n katsayısını bulalım.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0} e^{-inx} dx + \int_{0}^{\pi} e^{-inx} dx\right\} \\ &= \frac{1}{\pi i n}\left\{1-(-1)^n\right\} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad n = 2k \\ \frac{2}{(2k-1)\pi i} & , \quad n = 2k-1 \end{cases} \quad , \ k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

olup istenilen kompleks Fourier serisi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \\ &= \frac{2}{\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2k-1} e^{i(2k-1)x} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Örnek 3. $(-\pi, \pi)$ aralığında $f(x) = 4\cosh x$ olarak verilen fonksiyonun kompleks Fourier serisini bulunuz.

Çözüm.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

olmak üzere c_n katsayısında $f(x)$ yerine bu eşitliği yazıp katsayıyı öyle bulalım. Buradan

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^x + e^{-x}\right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{x(1-in)} + e^{-x(1+in)}\right) dx \\ &= \frac{(-1)^n\, 4\sinh\pi}{\pi\,(1+n^2)} \end{aligned}$$

olup istenilen kompleks Fourier serisi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \\ &= \frac{4\sinh\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} e^{inx} \end{aligned}$$

şeklindedir.