12. ARALIĞIN DEĞİŞTİRİLMESİ VE GENEL ARALIKTA FOURİER SERİLERİ

Genel bir (a, b) aralığında f fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a} \right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a} \right) \right\}$$

ve Fourier katsayıları

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a} \right) dx,\ n = 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a} \right) dx,\ n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada periyot $T = b - a$.

Örnek 1. $(0, 3)$ aralığında $f(x) = \frac{x}{3}$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm. $T = b - a = 3 - 0 = 3$ olup periyotu 3' dür. Bu fonksiyon

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi(2x-3)}{3} \right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi(2x-3)}{3} \right) \right\}$$

Fourier seri açılımına sahiptir. Şimdi katsayıları bulalım.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{x}{3} dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a}\right)dx \\
&= \frac{2}{9}\int_0^3 x\cos\left(\frac{n\pi(2x-3)}{3}\right)dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a}\right)dx \\
&= \frac{2}{9}\int_0^3 x\sin\left(\frac{n\pi(2x-3)}{3}\right)dx \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}, n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

olup o halde istenilen Fourier serisi

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{n\pi(2x-3)}{3}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi(2x-3)}{3}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi(2x-3)}{3}\right)
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Örnek 2. $5 < x < 15$ aralığında $f(x) = 10 - x$ ile verilen fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm. $T = b - a = 15 - 5 = 10$ olup periyotu 10' dur. Bu fonksiyon

$$
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{n\pi(x-10)}{5}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi(x-10)}{5}\right)\right\}
$$

Fourier seri açılımına sahiptir. Şimdi katsayıları bulalım.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &= \frac{2}{10}\int_5^{15}(10-x)\,dx \end{aligned}$$

olup burada

$$\begin{aligned} 10-x &= t \Longrightarrow -dx = dt \\ x_1 &= 5 \Longrightarrow t_1 = 5 \\ x_2 &= 15 \Longrightarrow t_2 = -5 \end{aligned}$$

dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} t dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$a_n = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\cos\left(\frac{n\pi(x-10)}{5}\right)dx$$

olup aynı dönüşüm uygulanırsa

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{5}\int_{-5}^{5} t\cos\left(\frac{n\pi t}{5}\right)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$b_n = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\sin\left(\frac{n\pi(x-10)}{5}\right)dx$$

olup yine aynı dönüşüm uygulanırsa

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{5}\int_{-5}^{5} t\sin\left(\frac{n\pi t}{5}\right)dt \\ &= -\frac{2}{5}\int_{0}^{5} t\sin\left(\frac{n\pi t}{5}\right)dt \\ &= \frac{10}{n\pi}\left(-1\right)^n,\ n=1,2,\ldots \end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde istenilen Fourier serisi

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{n\pi\left(x-10\right)}{5}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi\left(x-10\right)}{5}\right)\right\} \\ &= \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-1\right)^n\sin\left(\frac{n\pi\left(x-10\right)}{5}\right) \end{aligned}$$

şeklindedir.